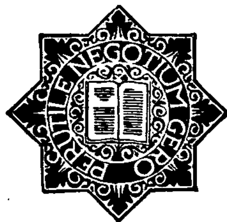
EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

4e JAARGANG 1927/28, Nr. 2



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Van-Eeghenstraat".

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

De universitaire opleiding tot leeraar in wiskunde en aanverwante vakken. Slot 49

DR. H. J. E. BETH. Eenvoudige beschouwingen uit de Meetkunde van Gauss 58

Boekbesprekingen 82

Ontwerp van een leerplan van de Haagsche leeraren 88

☛ De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. J. DE VRIES, zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

op de opleiding van leeraren in natuur- en scheikunde blijft in dit ontwerp buiten beschouwing. Evenzoo laat het de vraag rusten, in hoeverre het voor alle a.s. leeraren gewenscht is, vóór het verkrijgen van de onderwijsbevoegdheid in de gelegenheid te zijn gesteld tot het opdoen van practische ervaring op onderwijsgebied.

8. Het hieronder volgend ontwerp bevat geen volledig leerplan voor hooger onderwijs aan a.s. leeraren in wiskunde; het volstaat met de groote lijnen te trekken en deze hier en daar te verduidelijken door voorbeelden.

Plan voor de wijze, waarop het Universitaire onderwijs rekening zou kunnen houden met den lateren leeraarswerkkring van studenten in de faculteit van Wis- en Natuurkunde.

In het door de Commissie-Beth gepubliceerde rapport: „Beschouwingen over de universitaire opleiding tot leeraar in Wis- en natuurkunde" is de aandacht gevestigd op verschillende tekortkomingen, die deze opleiding aan de Commissie als regel leek te vertoonen. De wenschen, die de overtuiging van het bestaan dezer tekortkomingen deed rijzen, kunnen ter wille van de overzichtelijkheid worden ingedeeld als opvolgend betrekking hebbende op:

I. Kennis der elementaire wiskunde.
II. Kennistheoretische ontwikkeling.
III. Kennis van de geschiedenis van de wiskunde, de mechanica en de kosmographie.
IV. Methodologische en didactische scholing.

Elk van deze onderwerpen wordt hieronder nader besproken.

I. De verlangde kennis der elementaire wiskunde kan als volgt nader worden omschreven:

a. Verbreeding en verdieping van de door het voorbereidend onderwijs aangebrachte kennis der elementaire wiskunde.

b. Inzicht in het wezen der elementaire wiskunde, in het bijzonder in de plaats, die zij ten opzichte van andere deelen der wiskunde bekleedt.

Toelichting:

ad I*a*. Het Gymnasium en de H.B.S. brengen den leerling een zeer bescheiden kennis van de lagere wiskunde, met name van de planimetrie, de stereometrie, de gonio- en trigonometrie en de lagere algebra bij. In den regel wordt deze kennis aan de universi-

teit niet systematisch verder ontwikkeld, maar bepaalt men zich onmiddellijk tot behandeling van de Analytische Meetkunde en de Infinitesimaalrekening. De bezwaren van deze handelwijze zijn in het bovengenoemde rapport geschetst. Het ware nu gewenscht, dat zorg werde gedragen, dat de student zich, naast de kennismaking met de hoogere wiskunde, bezig hield met moeilijkere onderwerpen uit de elementair-mathematische gebieden, dan waarmee hij zich in zijn schooltijd moest tevreden stellen. Voor het candidaatsexamen zou men dan van hem een kennis van de planimetrie, de stereometrie de elementaire algebra, de theoretische rekenkunde en de gonio- en trigonometrie kunnen eischen, niet onderdoende voor die, welke van candidaten voor de acte KI verlangd wordt. Door deze omschrijving is de gewenschte omvang der studie voldoende bepaald.

Naast deze beoefening van wat men de hoogere deelen der lagere wiskunde zou kunnen noemen, behoorde echter een verdieping te staan van het inzicht in de grondslagen der elementaire wiskunde, voorzoover deze zonder samenhang met de hoogere wiskunde zelfstandig kunnen worden behandeld. Wij denken hierbij in het bijzonder aan een zoo streng mogelijken opbouw van de meetkunde in Euclidische ruimten van twee of drie afmetingen. De toestand behoorde zoo te zijn, dat de leeraar, die in zijn onderwijs door de onvermijdelijke aanpassing aan het bevattingsvermogen van zijn leerlingen zeer veel van de wiskundige exactheid moet opofferen en vaak genoegen moet nemen met zeer onzuivere redeneeringen, voor zich zelf de kennis bezat van een strengen opbouw van de gebieden, die hij behandelt en dat hij niet (zooals tegenwoordig vrijwel regel is), zoo hij al het onzuivere inziet van de redeneeringen, die hij in de leerboeken aantreft en aan de hand daarvan doceert, dan toch nog geheel onbekend is met de manier, waarop die redeneeringen zouden kunnen worden verbeterd.

ad I*b*. Door het voldoen aan de onder I*a*. gestelde eischen is nu echter nog geenszins gewaarborgd, dat de a.s. leeraar nu ook die ruimheid van blik op de later door hem te doceeren gebieden zal hebben verkregen, die voor het geven van vormend onderwijs gewenscht is. Het is waar, dat tal van onderwerpen, waarmee hij ook in de thans van kracht zijnde regeling der academische studie kennis zal maken, tot die verruiming van zijn blik in hooge mate zullen kunnen bijdragen: zoo zal b.v. kennismaking met de groepentheoretische beschouwing van de meetkunde, met de projectieve,

de niet-Euclidische en de meerdimensionale meetkunden, met de axiomatica, met de leer der puntverzamelingen, met de theorie van de functies eener complexe veranderlijke en met verschillende andere onderwerpen zeer zeker, ook zonder opzettelijke aandacht voor den lateren leeraarswerkkring, den gewenschten invloed uitoefenen.

Deze invloed zou echter nog groeien bij een meer opzettelijke toepassing der genoemde onderwerpen op de elementaire wiskunde, bij een behandeling dus van elementair-mathematische onderwerpen, waarbij men òf over de kennis van de genoemde gebieden kon beschikken òf waarbij aanleiding bestond, die gebieden te gaan betreden. Ter nadere verduidelijking van dezen wensch moge op twee voorbeelden van de gedachte behandelingswijze gewezen worden. Klein's *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, een werk, dat voortgekomen is uit geheel dezelfde wenschen, welker verwezenlijking wij thans nastreven en de *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari, raccolte e coordinate da F. Enriques.* Tevens mogen, zonder eenige aanspraak op volledigheid, eenige voorbeelden genoemd worden van onderwerpen, die bij zulk een behandelingswijze in ieder geval ter sprake zouden moeten komen, omdat de kennis daarvan voor den a.s. leeraar onmisbaar is. Als zoodanig noemen wij:

functietheoretische behandeling van de in het elementaire onderwijs optredende functies;

volledige beheersching van de achtereenvolgens tot stand gebrachte uitbreidingen van het getalbegrip, in het bijzonder van de verschillende theorieën van het irrationale getal;

kennis van de bewijzen van de transcendentie van de getallen e en π;

kennis van de z.g. onmogelijkheidsbewijzen (b.v. van de constructie van den regelmatigen zevenhoek, van de trisectie van een willekeurigen hoek enz.).

Met den overgang naar de door II en III aangeduide gebieden gaat een uitbreiding van de strekking van het betoog gepaard, zooals in opmerking 7 werd bedoeld: de volgende beschouwingen hebben dus in niet mindere mate op a.s. leeraren in mechanica en kosmographie dan op a.s. leeraren in wiskunde betrekking.

Het gebied II kan als volgt worden omschreven:

Vooreerst is voor ieder, die een wetenschappelijke studie volbrengt, een algemeene kennistheoretische ontwikkeling, b.v. in den omvang van Heijmans' *Gesetze und Elemente des Wissenschaftlichen Denkens* gewenscht. [1]) Voor de a.s. leeraren in wiskunde- en mechanica is het echter noodzakelijk, daarnaast op de hoogte te zijn van die onderzoekingen, die, meer van mathematisch dan van philosophisch standpunt uit gevoerd, het inzicht in de grondslagen der wiskunde hebben verdiept. We noemen als voorbeelden van te behandelen onderwerpen:

de verschillende opvattingen over den oorsprong der mathematische exactheid; het verband van wiskunde en ervaring, van wiskunde en natuurkunde; het axiomatiseeren der natuurwetenschappen; de ontwikkeling der verzamelingenleer; de algebra der logica.

Met het gebied II staan nog tal van onderwerpen in verband, die, hoewel niet vallende onder het begrip kennistheorie of philosophie der wiskunde, hier het best kunnen worden ondergebracht, omdat ze eveneens het inzicht in doel en wezen der mathesis betreffen. Wij denken, om een voorbeeld te noemen, aan de wenschelijkheid, dat vooral de leeraar in wiskunde geleerd hebbe, zich rekenschap te geven van de beteekenis dezer wetenschap voor het menschelijk denken, van hare geestelijke waarde en van de rechtmatigheid van hare aanspraken op een eerste plaats onder de hulpmiddelen voor intellectueele opvoeding. Het is toch een feit, dat de leeraar in wiskunde, meer dan die in eenig ander vak, steeds weer aan de zijde van zijn collega's, zijn leerlingen en de ouders dier leerlingen stuit op verregaande onbekendheid met den aard en de waarde van zijn vak, die zich òf in vijandig wanbegrip òf in, naar voorlichting strevende, belangstelling uit. Hij schiet dan te kort, wanneer hij slechts in de wiskunde en niet over de wiskunde kan redeneeren. Als een concreet voorbeeld van de onderwerpen, waarmee bekendheid voor hem gewenscht is, moge het vraagstuk van de overdracht (transfer of training, transfer of mind) genoemd worden.

Thans overgaande tot het gebied III, de historie der wiskunde, der mechanica en der kosmographie, zien we af van een reproductie van het reeds vaker geleverde betoog, waarom historische ontwik-

[1]) Men zou hier ook kunnen noemen Paul Natorp, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.*

keling voor den beoefenaar der wis- en natuurkundige wetenschappen in het algemeen en voor den a.s. leeraar in het bijzonder gewenscht is en volstaan met opsomming van voorbeelden van onderwerpen, die stof tot colleges en examens zouden kunnen opleveren.

III*a*. *Zuivere Wiskunde.*

Voor den a.s. leeraar is in de eerste plaats een overzicht van de geschiedenis der wiskunde gewenscht; daarbij kómt het niet in de eerste plaats aan op chronologische en biographische onderwerpen, maar voór alles daarop, dat hij kennis neemt van de wijze, waarop telkens nieuwe gebieden der wiskunde zijn ontdekt, van de moeilijkheden, waartoe de voortdurende uitbreiding van de bestaande en de voortdurende vorming van nieuwe mathematische begrippen aanleiding gaf, van de geleidelijke vereenvoudiging en verbetering in de gebruikte methoden.

Daarnaast is in het bijzonder een eenigszins volledige kennis van de Grieksche wiskunde gewenscht. Het is een wantoestand, dat men de in zoo hooge mate door Grieksche opvattingen beïnvloede elementaire meetkunde zou onderwijzen, zonder althans het werk van Euclides door eigen studie grondig te kennen. Men zou dan ook van den doctorandus de bewijzen kunnen eischen, dat hij zich die kennis had eigen gemaakt. Ter ontwikkeling, zoowel van het historisch, als van het zuiver-mathematisch inzicht is daarnaast studie van de werken van Archimedes en Apollonius gewenscht.

III*b*. *Mechanica.*

Hier komt het voor den a.s. leeraar in de eerste plaats aan op kennis van de ontwikkeling van de mechanica van Newton. Het onderwijs zou, na een korte inleiding over Grieksche en Middeleeuwsche mechanica, de wordingsgeschiedenis der Newtonsche Mechanica vanaf Galilei tot aan Gauss en Hamilton kunnen behandelen, daarbij vooral den nadruk leggende op de ontwikkeling der principes. Kennismaking met de oorspronkelijke werken van minstens een der grootste schrijvers zou ook hier weer zeer gewenscht zijn.

Om misverstand te voorkomen, moge hierbij nog worden opgemerkt, dat we hier alleen die onderwerpen opsommen, waarmee we de tegenwoordige studie der mechanica of der mathematische

physica gaarne zouden zien aangevuld. Het behoeft namelijk wel geen betoog, dat het voor de gewenschte ruimheid van blik op de klassieke mechanica noodzakelijk is, dat de doctorandus op de hoogte zij van de wijziging in de mechanische opvattingen, die door de relativiteitstheorie en de quantentheorie is teweeggebracht en dat lectuur van de oorspronkelijke verhandelingen van moderne onderzoekers op dit gebied voor hem evenzeer gewenscht is als de studie van Newton's *Principia*. We nemen echter aan, dat deze zijde van de studie der mechanica in het huidige universitaire onderwijs reeds voldoende tot haar recht komt.

III*c*. *Kosmographie*.

De historische belangstelling wordt hier zoowel door de Grieksche astronomen gewekt, als door de grondleggers der Coppernicaansche astronomie. Studie van de werken van Ptolemaeus en van minstens een der schrijvers Coppernicus, Galilei, Kepler, Tycho Brahe, Huygens of Newton ware gewenscht.

IV. De tot dusver geformuleerde wenschen werden alle ingegeven door de overtuiging, dat het voor het geven van goed onderwijs noodzakelijk is, dat de leeraar zelf zijn vak beheerscht en het vanuit een voldoend ruim standpunt kan overzien. Niet minder wenschelijk is het echter, dat hij heeft leeren nadenken over de vraag, op welke wijze hij zijn onderwijs het meest vruchtbaar zal maken, dat hij dus ontwikkeld is op methodologisch en didactisch gebied. Deze wensch zal in de practijk van het hooger onderwijs menigmaal verwezenlijkt kunnen worden in nauw verband met de boven onder I, II en III geformuleerde. Inderdaad bestaat de mogelijkheid, dat tal van de opgesomde onderwerpen vanzelf aanleiding zullen kunnen geven tot opmerkingen en raadgevingen, die de practijk van het later door den student te geven onderwijs betreffen. Zoo zal b.v. de onder I*a*. genoemde strenge behandeling der elementaire meetkunde onwillekeurig aanleiding geven tot behandeling van de vraag, in hoeverre het wenschelijk en mogelijk is, het schoolonderwijs door de verkregen inzichten te laten beïnvloeden, terwijl, om een tweede voorbeeld te noemen, de behandeling van de geschiedenis der mechanica er vanzelf toe zal voeren, te overwegen of en, zoo ja, hoe de moeilijkheden, die deze geaxiomatiseerde natuurwetenschap aan beginnelingen biedt, door een inleidende historische behandelingswijze zouden kunnen worden ondervangen.

Hiernaast zal echter de verzorging van de didactische en methologische ontwikkeling van den a.s. leeraar nog voldoende stof voor een afzonderlijke behandeling kunnen opleveren. We volstaan weer met de opsomming van enkele voorbeelden van daarbij ter sprake te brengen onderwerpen:

Er zal b.v. gesproken kunnen worden over de wijze, waarop men in het meetkunde-onderwijs te werk zal kunnen gaan bij de behandeling van het begrip verhouding van twee onderling onmeetbare lijnstukken of van andere onderling onmeetbare grootheden. Hier kan nu vooreerst de practische vraag gesteld worden, of men, met verschillende leerboeken, dit begrip maar liefst onbesproken moet laten; zoo ja, welke moeilijkheden zich dan kunnen voordoen door het onvermijdelijk optreden van zulke verhoudingen; zoo neen, of het mogelijk en gewenscht is, hetzij verband te leggen tusschen de beschouwing der onderling onmeetbare lijnstukken in de meetkunde en een in de algebra te behandelen theorie van het irrationale getal, hetzij zonder nadere preciseering van wat men onder de verhouding van twee onderling onmeetbare lijnstukken verstaat, te volstaan met hare insluiting tusschen rationale grenzen, hetzij de Grieksche methode te volgen, die in het vijfde Boek der *Elementa* van Euclides ontwikkeld wordt, hetzij door de eveneens Grieksche methode der indirecte bewijzen voor stellingen, waarin verhoudingen van onderling onmeetbare grootheden optreden, de moeilijkheid, die het irrationale nu eenmaal reeds in het begin van de beoefening der wiskunde biedt, te ontgaan. Daarnaast kan dan worden overwogen, hoe de exacte opbouw langs elk dezer wegen zou geschieden en langs welken weg men het meest van de wiskundige exactheid redt.

Wij noemen verder vragen en onderwerpen als de volgende:

Welke axioma's moet men in het planimetrie-onderwijs uitdrukkelijk formuleeren? Welke formuleerbare axioma's worden dan stilzwijgend aangenomen?

Welke beschouwingen zijn noodig om te komen tot het begrip lengte van een lijnstuk, oppervlak van een figuur, inhoud van een lichaam?

Welke methoden heeft men ter behandeling van de inhouden van stereometrische lichamen?

Op welke wijzen kan de gelijkvormigheid van twee figuren behandeld worden?

De propaedeutische methode van meetkunde-onderwijs.

In hoeverre is het mogelijk en gewenscht, bij het beginonderwijs in de meetkunde en misschien ook later de planimetrie en de stereometrie tot een geheel te versmelten?

Welke verhouding behoort er bij het onderwijs te bestaan tusschen den aan theorie en den aan vraagstukken te besteden tijd?

Verdient het aanbeveling, in het wiskunde-onderwijs practische (b.v. geodetische) toepassingen in te voeren?

Voorlichting in didactische en methodologische litteratuur.

Kritische behandeling van binnen- en buitenlandsche methoden en leerboeken.

Op welke wijze kan het limietbegrip het best worden ingevoerd en behandeld?

Het limiet-begrip zou dan tevens weer als voorbeeld kunnen dienen van een onderwerp, waarbij historische behandeling vanaf Zeno den Eleaat tot in den nieuwsten tijd zeer vruchtbaar zou kunnen zijn. Op deze wijze blijkt opnieuw, hoezeer de gebieden, die boven ter wille van de overzichtelijkheid onderscheiden zijn, elkaar in de practijk menigmaal zullen doordringen en aanvullen.

Thans rest nog de vraag, op welke wijze bij de universitaire examina zou kunnen worden nagegaan, in hoeverre de geëxamineerde zich de kennis heeft eigen gemaakt, die in het bovenstaande voor hem, speciaal met het oog op zijn onderwijsbevoegdheid, wenschelijk werd geacht. De Commissie wenscht, ter beantwoording van die vraag, het denkbeeld in overweging te geven, dat de wet op het Hooger Onderwijs aldus zou worden gewijzigd, dat naast het thans gebruikelijke doctoraal-examen, dat dan alleen het recht tot het verwerven van den doctorstitel zonder effectus civilis zou geven, een ander examen zou worden ingesteld, dat, in vereeniging met het met goed gevolg afgelegde doctoraal-examen, pas onderwijsbevoegdheid zou verleenen en waarop dan in het bijzonder zou worden onderzocht, of de doctorandus tot de uitoefening dier bevoegdheid is voorbereid. Het zou daarbij een punt van nadere overweging kunnen uitmaken, of dit examen als een derde gedeelte aan het doctoraal-examen in den thans gebruikelijken zin van het woord zou moeten worden toegevoegd, of dat het, zooals

het artsexamen voor de medici, buiten universitair verband zou moeten worden afgenomen.

De Commissie:

D. P. A. VERRIJP, Voorzitter.

J. H. SCHOGT.

J. G. C. VRIENS.

J. VAN ANDEL.

E. J. DIJKSTERHUIS, Secretaris.

EENVOUDIGE BESCHOUWINGEN UIT DE MEETKUNDE VAN GAUSS

DOOR

DR. H. J. E. BETH (Deventer).

II.

---

§ 14. Een *grensoppervlak (horispheer* volgens Lobatschefsky) ontstaat, als we de grenskromme om een harer assen laten wentelen. De assen van de grenskromme worden daarbij assen van het oppervlak. We zouden nu kunnen bewijzen, dat elk dier assen als omwentelingsas voor het grensoppervlak te beschouwen is. Anders uitgedrukt luidt deze stelling: elke koorde van het oppervlak maakt gelijke hoeken met de assen harer uiteinden. We kunnen nog een andere formuleering voor deze stelling geven, als we gebruik maken van het begrip van *correspondeerende punten,* dat reeds door Gauss is ingevoerd. Men noemt nl. twee punten op evenwijdige rechten correspondeerend, als hun verbindingslijn gelijke hoeken met de beide rechten vormt. De stelling luidt nu: als op drie rechten, die evenwijdig zijn in dezelfde richting, opv. de punten A, B en C aangenomen zijn zoodanig, dat A en B correspondeerend zijn en ook B en C, dan zijn ook A en C correspondeerend. Voor het geval, dat de drie evenwijdigen in één vlak gelegen zijn komt de zaak neer op de drie middelloodlijnen van een driehoek, waarvan twee evenwijdig zijn. Voor het geval zij niet in één vlak gelegen zijn, komt het bewijs neer op de beschouwing van middelloodvlakken, waarbij echter de snijlijnen met het vlak van den driehoek middelloodlijnen zijn, die in het 1ste der 3 gevallen van § 12 verkeeren; ik meen het hier verder ter bekorting te mogen achterwege laten.

Een vlak door een as snijdt het grensoppervlak volgens een grenskromme en wordt hoofdvlak van het oppervlak genoemd. Beschouwen we een vlak, dat geen as bevat, dan is gemakkelijk in te zien, dat we steeds een rechte kunnen konstrueeren, die lood-

recht op het gegeven vlak is en die tot de assen behoort. Beschouwen we die as als omwentelingsas, dan blijkt, dat het willekeurige vlak het grensoppervlak snijdt volgens een cirkel; de bedoelde rechte is de as van den cirkel en haar snijpunt met het grensoppervlak heet de pool van den cirkel.

Uit het voorgaande volgt ook, dat twee willekeurige grensoppervlakken kongruent zijn en dat een grensoppervlak, zonder eenige verandering te ondergaan, in zichzelf kan bewogen worden. Een gewichtig punt in onze beschouwing vormt nu de bewering, dat als we op zulk een grensoppervlak de grenskrommen de rol van rechte lijnen laten vervullen, de meetkunde op dat oppervlak de Euclidische is. Lobatschefsky bewijst dit door te laten zien, dat de som der hoeken in een grensboogdriehoek 180° bedraagt, of, wat hetzelfde is, dat, als drie vlakken elkaar twee aan twee volgens evenwijdige rechten snijden, de som der tweevlakshoeken 180° bedraagt. Dit bewijst hij door gebruik te maken van eigenschappen van den boldriehoek, echter, nà te hebben aangetoond, dat de geheele boldriehoeksmeting van het Euclidische postulaat onafhankelijk is. Tot deze laatste gewichtige waarheid kwam Johann Bolyai ook; ik moet er echter bij vermelden, dat de zooeven reeds genoemde Lambert haar ook reeds uitgesproken had. Ik heb nu zooeven uit het werk van Lobatschefsky, dien ik tot nog toe in hoofdzaak gevolgd heb, de beschouwingen over boldriehoeken niet vermeld, omdat ik meen ze voor een eenvoudige uiteenzetting te kunnen missen. Om nl. aan te toonen, dat op het grensoppervlak de Euclidische meetkunde geldt, is het voldoende de opmerking te maken, dat er op het grensoppervlak gelijkvormige figuren bestaan (zie § 3). Hebben we toch drie platte vlakken, die elkaar volgens evenwijdige rechten snijden, dan kunnen we twee verschillende grensoppervlakken aanbrengen, waarvoor die rechten de assen zijn. Maar dan worden op de grensoppervlakken verschillende driehoeken ingesneden met dezelfde hoeken. Leggen we nu de grensoppervlakken op elkaar, dan zijn op het oppervlak twee gelijkvormige, en niet gelijke, grensboogdriehoeken geteekend.[1])

---

[1]) Er is echter een belangrijk verschil tusschen het grensoppervlak en het platte vlak; het laatste kan in zichzelf omgelegd worden, het eerste niet; daardoor kunnen eigenlijk niet alle eigenschappen, die in

Nu we zoover gevorderd zijn, dat ik iets over berekeningen en constructies kan gaan mededeelen, ga ik meer van Lobatschefsky afwijken en Johann Bolyai volgen. Ik doe dit ook om gemakkelijker te komen tot karakteristieke gedeelten uit zijn hoofdwerk, de „Appendix" [2]).

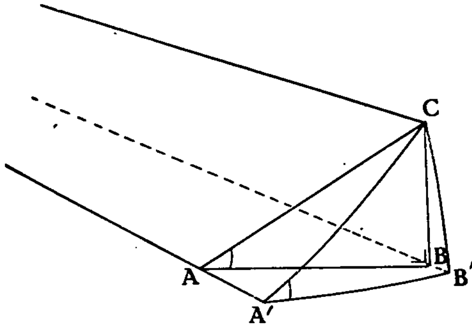


Fig. 24.

Zij (Fig. 24) ABC een rechtlijnige driehoek, rechthoekig in B. Trek in A de loodlijn op het vlak van den driehoek en trek door B en C twee rechten, die met die loodlijn hetzelfde eindpunt gemeen hebben. Breng het grensoppervlak door C aan, dat bij die rechten behoort. De drie vlakken, die elk een zijde van den driehoek en twee der evenwijdige rechten bevatten, snijden op het grensoppervlak een grensbogendriehoek in, die, zooals men gemakkelijk aantoont, in A' den hoek A en in B' een rechten hoek bezit. Daar op het grensoppervlak de Euclidische meetkunde geldt, is

$$\text{Sin A} = \frac{bg\ \text{B'C}}{bg\ \text{A'C}}.$$

Om nu terug te gaan tot het platte vlak vervangen we (wederom op grond van het feit, dat op het grensoppervlak de Euclidische

---

de Euclidische Meetkunde gelden, zonder meer worden overgenomen, nl. niet de eigenschappen, die door omlegging worden bewezen (b.v. de eigenschappen van den gelijkbeenigen driehoek).

[1]) De volledige titel luidt: „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem; adjecta ad causam falsitatis quadratura circuli geometrica". In 1902 is bij Teubner een nieuwe uitgave verschenen. Oorspronkelijk verscheen het werk als aanhangsel bij het leerboek over de grondslagen der wiskunde van Johann's vader Wolfgang Bolyai; vandaar de naam „Appendix". Door de zeer bondige wijze van behandeling en het gebruik van een groot aantal teekens is het werk van Johann Bolyai minder dan dat van Lobatschefsky (zie de noot op pag. 3) voor een eerste kennismaking aan te bevelen. Een Duitsche vertaling van de Appendix (en van gedeelten van andere werken van Johann en Wolfgang Bolyai en een biographie van beiden) vindt men in het werk van P. Stäckel: „Wolfgang und Johann Bolyai" (Teubner).

meetkunde geldt) de laatste verhouding door de verhouding der cirkelomtrekken, die *bg* B'C en *bg* A'C tot stralen hebben. Dit zijn echter de cirkels, die in het platte vlak opv. de rechten BC en AC als stralen hebben. Dus is:

$$\text{Sin A} = \frac{\bigcirc \text{BC}}{\bigcirc \text{AC}}$$

(de hier gebruikte notatie is van Johann Bolyai). Hieruit volgt gemakkelijk de *sinusregel* voor een willekeurigen driehoek:

$$\text{Sin A} : \sin \text{B} = \bigcirc a : \bigcirc b.$$

Door middel van deze formule bewijst Johann Bolyai den sinusregel voor den boldriehoek, en maakt hieruit de ons reeds bekende gevolgtrekking, dat de spherische driehoeksmeting van het parallellen-postulaat onafhankelijk is.

Fig. 25.

Om thans verder te kunnen komen zullen we dus den omtrek van een cirkel in zijn straal moeten kunnen uitdrukken. We gaan tot de afleiding hiervan over en zullen dan tegelijkertijd een uitdrukking voor den parallelhoek vinden, uitgedrukt in den afstand. (De hiervoor gevolgde weg is niet die van Bolyai).

We nemen (fig. 25) een punt P op zoodanigen afstand van een rechte AQ, dat de beide evenwijdigen *m* en *n* door P met AQ loodrecht op elkaar zijn. De grensboog, die door P gaat en bij een dier rechten als as behoort, heeft, tot zijn snijpunt met AQ gerekend, een bepaalde lengte, die we door S zullen voorstellen. Teeken nog een willekeurige as voor denzelfden grensboog, die

dien boog in B en de andere door P getrokken evenwijdige in C snijdt. We schrijven: BP $= s$, BC $= u$, PC $= t$; het is onze bedoeling u en s in t uit te drukken. Daartoe nemen we op de rechte BC het stuk CP′ = CP, en trekken door P′ den grensboog, die P′B als as heeft. Dan is volgens (1) S : (S — s) $= e^{t+u}$, dus

$$S - s = S.\ e^{-t-u}.$$

Vervolgens teekenen we een figuur (26), met behulp waarvan we S + s in S uitdrukken. Daartoe kiezen we het punt P op dezelfde wijze ten opzichte van AQ als zooeven. We verlengen nu echter QP met een boog PB $= s$. Door B trekken we weder de as van den grensboog, dan wordt door het verlengde van de tweede

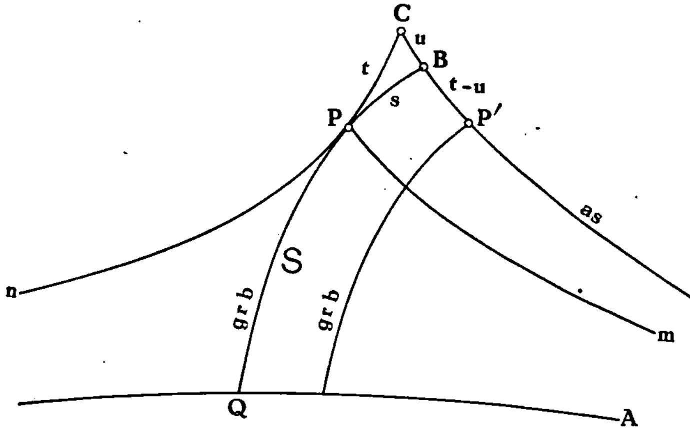


Fig. 26.

door P getrokken evenwijdige hierop een stuk u en op dat verlengde zelf een stuk t afgesneden. We nemen CP′ $= t$ en trekken door P′ den grensboog, die CP′ als as heeft. Thans is:

$$S + s = S.\ e^{t-u}.$$

Uit de beide vergelijkingen volgt:

$$e^u = Ch\, t,\ s = S\, Th\, t.$$

De in de vergelijkingen voorkomende konstante S is gemakkelijk te bepalen als men bedenkt, dat

$$\lim_{t=0} \frac{s}{t} = 1$$

is; immers volgt hieruit, dat

$$S = 1$$

is, dus de bedoelde boog de natuurlijke lengte-eenheid is.

Thans is

$$\mathbf{e^u = Ch\,t} \qquad (2)$$

$$\mathbf{s = Th\,t} \qquad (3)$$

Met behulp van deze vergelijkingen kunnen we thans overgaan tot de *bepaling van de lengte van den cirkelomtrek.*

AC en BC zijn (fig. 27) twee evenwijdigen; we trekken AB $\perp$ AC en grensboog AD, die AC als as heeft. Zij weder als zooeven: AB $= t$, BD $= u$, *bg* AD $= s$. Zij nog DE of $t' \perp$ AC.

Fig. 27.

De cirkels, die DE en BA als stralen hebben, hebben omtrekken, die zich verhouden als $1 : e^u$, gelijk volgt uit de beschouwing der grensoppervlakken, waarop die cirkels gelegen zijn en (1) van blz. 24. Dus is

$$\bigcirc t = \bigcirc t' \,.\, e^u.$$

Of, met behulp van (2) en (3) en van het feit, dat $\bigcirc t' = \bigcirc s = 2\,\pi\,.\,s$ is: [1])

$$\bigcirc t = 2\,\pi\,s\,.\,e^u = 2\,\pi\,Th\,t.\,Ch\,t.$$

$$\mathbf{\bigcirc t = 2\,\pi\,Sh.\,t} \qquad (4).$$

We maken hieruit de gevolgtrekking, dat voor een willekeurigen driehoek de sinusregel als volgt is uit te drukken:

$$\mathbf{\sin A : \sin B = Sh\,a : Sh\,b,} \qquad (5)$$

waarmede het uitgangspunt voor de trigonometrie voor de meetkunde van Gauss gevonden is.

---

[1]) Immers is het dezelfde cirkel, die door $\bigcirc t'$ en door $\bigcirc s$ wordt voorgesteld.

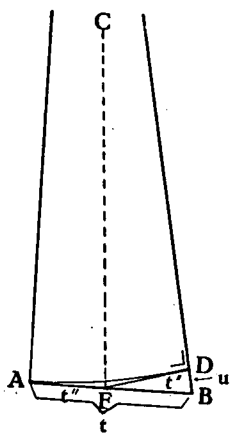


Fig. 28.

Voor de *bepaling van den parallelhoek als functie van den afstand* teekenen we (Fig. 28) in de figuur van zooeven in D de raaklijn aan den grensboog AD, dus DF $\perp$ BC. Is nu AF $=$ DF $= t''$, dan behoort t'' bij een grensboog, die de helft is van den grensboog, waarbij t behoort.

Daarom is, in verband met (3):

$$Th\,t = 2\,Th\,t''.$$

Voorts is in den rechthoekigen $\triangle$ FDB volgens (5):

$$\text{Sin B} = \text{Sin}\,\Pi(t) = \frac{Sh\,t''}{Sh\,(t-t)''} = \frac{1}{Sh\,t\,Cth\,t'' - Cht} = \frac{1}{2\,Sh t\,Cth\,t - Cht} = \frac{1}{Ch\,t}.$$

Dus is

$$\text{Sin}\,\Pi(t) = \frac{1}{Ch\,t}, \qquad (6)$$

waaruit we afleiden

$$\textbf{Cotg}\,\tfrac{1}{2}\,\Pi(\mathbf{t}) = \mathbf{e}^{\mathbf{t}}. \qquad (6a)$$

§ 16. We gaan nu over tot de beschouwing van de oppervlakken van vlakke figuren en bepalen eerst op de door Gauss gegeven wijze het oppervlak van een willekeurigen driehoek. We volgen dezen weg, omdat hij overeenstemt met den weg, dien we gewoon zijn te volgen om te komen tot het oppervlak van den boldriehoek. [1])

Daarvoor denken we ons de figuur, begrensd door twee rechten *ab* en *ac*, die een hoek vormen, en door een rechte zóó, dat *ab*//*ed* en *ac*//*de* (Fig. 29) is. Het door deze rechten begrensde vlak, waarvan we onderstellen, dat het eindig is, is een functie van φ en wordt door $f(\pi - \varphi)$ voorgesteld.

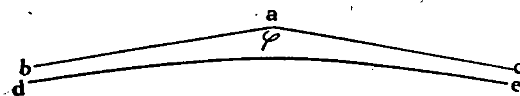


Fig. 29.

---

[1]) We zouden ook op andere wijze te werk kunnen gaan, waarbij we niet noodig hebben het maken van een onderstelling omtrent de eindigheid van het oppervlak van bepaalde figuren.

Noemen we nu τ het oppervlak van den asymptotischen driehoek T[1]), d.w.z. van den driehoek, wiens zijden *ab, cd* en *fe* zijn, zóódanig, dat

$$ab\,//\,dc,\ cd\,//\,fe \text{ en } ef\,//\,ba \text{ (Fig. 30)}$$

is,

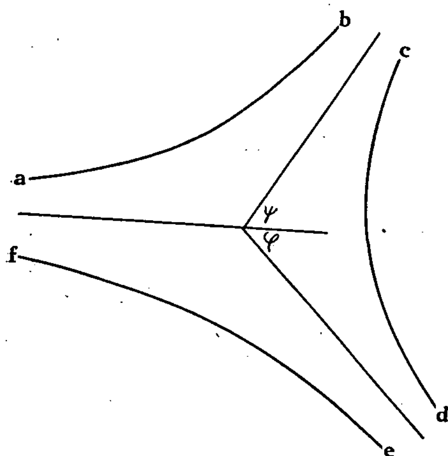


Fig. 30.

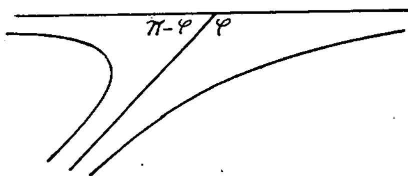


Fig. 31.

dan lezen we uit Fig. 31 af, dat

$$f(\varphi) + f(\pi - \varphi) = \tau$$

is.

Evenzoo blijkt uit figuur 30, dat we hebben:

$$f(\varphi) + f(\psi) + f(\pi - \varphi - \psi) = \tau.$$

Schrijven we dit als volgt:

$$f(\varphi) + f(\psi) = \tau - f(\pi - \varphi - \psi),$$

dan blijkt, dat

$$f(\varphi) + f(\psi) = f(\varphi + \psi)$$

is, waaruit we gemakkelijk het besluit trekken:

$$\frac{f(\varphi)}{\varphi} = \text{konstant};$$

immers is $\qquad nf(\varphi) = f(n\varphi),$

[1]) Dat de asymptotische driehoek in het vlak van Gauss een *bepaalde* figuur is, zal later duidelijker worden, als we zullen zien hoe dergelijke figuren kunnen worden geconstrueerd.

waaruit volgt $nf^1(\varphi) = nf^1(n\varphi)$, zoodat $f^1(\varphi)$ konstant is; bovendien is $f(0) = 0$.

De waarde der konstante is $\frac{\tau}{\pi}$.

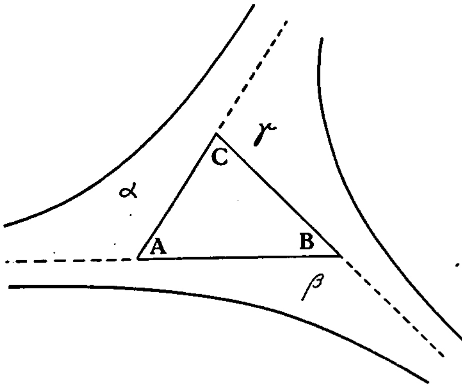


Fig. 32.

Zij nu gegeven (Fig. 32) een driehoek met hoeken A, B en C. Verlengen we, in denzelfden zin rondgaande, de zijden door één der hoekpunten en konstrueeren we de drie rechten, die evenwijdig zijn met de verlengden van twee der zijden, dan ontstaan oppervlakken α, β en γ wier grootte gegeven wordt door

$$\alpha = \frac{A}{\pi}\tau,\ \beta = \frac{B}{\pi}\tau,\ \gamma = \frac{C}{\pi}\tau.$$

Noemen we Z het oppervlak van den driehoek, dan is

$$\tau - Z = \frac{A + B + C}{\pi}\tau,$$

dus

$$Z = \frac{\pi - (A + B + C)}{\pi}\tau,$$

zoodat het oppervlak van een driehoek evenredig is met het bedrag, dat zijn hoekensom van π verschilt, en dat ik het defect van den driehoek zal noemen.

Stellen we het defect, uitgedrukt in radialen, voor door Z, dan is

$$Z = \frac{z}{\pi}\tau. \qquad (7)$$

Vervolgens bepalen we het oppervlak, begrepen tusschen een grensboog en de assen der uiteinden. Zij s de lengte van den grensboog, uitgedrukt in de natuurlijke lengte-eenheid. De grensboog, die

binnen de figuur op een afstand x van den gegeven boog gelegen is en dezelfde assen heeft, heeft tot lengte

$$se^{-x}.$$

Het elementaire oppervlak, begrepen tusschen dezen boog en den boog, die er op een afstand dx van verwijderd is, heeft tot oppervlak

$$se^{-x}dx;$$

we hebben hierbij een eenheid van oppervlak aangenomen, en wel op zoodanige wijze, dat in het elementaire het oppervlak van een rechthoek op de gebruikelijke wijze wordt voorgesteld. Het gevraagde oppervlak wordt

$$\int_0^\infty se^{-x}dx = s \qquad (8)$$

We kunnen thans ook het oppervlak τ van den asymptotischen driehoek in de zooeven aangenomen eenheid uitdrukken. Teekenen we daartoe twee evenwijdige rechten en een lijn, die twee correspondeerende punten verbindt. Zij ζ het complement van den hoek, dien de verbindingslijn met de evenwijdigen vormt, dan is het oppervlak van den driehoek, door de drie rechten gevormd, volgens (7) gelijk aan

$$\frac{2\zeta}{\pi}\tau.$$

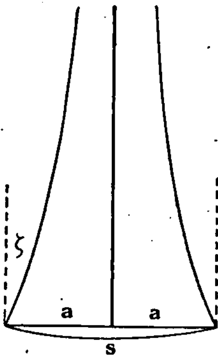


Fig. 33.

Verbinden we de correspondeerende punten ook door een grensboog, die s tot lengte moge hebben, dan is in verband met (8):

$$\lim_{\zeta=0} \frac{\frac{2\zeta}{\pi}\tau}{s} = 1.$$

Zij $2a$ de koorde van den grensboog s, dan is volgens (6):

$$\cos\zeta = \frac{1}{Ch\,a}, \text{ dus } \sin\zeta = Th\,a.$$

Voorts is dus:

$$\lim_{\zeta=0} \frac{\frac{2\zeta}{\pi}\tau}{s} = \frac{\tau}{\pi} \lim_{\zeta=0} \frac{2\zeta}{s} = \frac{\tau}{\pi} \lim_{\zeta=0} \frac{\zeta}{\sin \zeta} \cdot \frac{Th\, a}{a} \cdot \frac{2a}{s} = \frac{\tau}{\pi},$$

waaruit volgt, dat $\tau = \pi$ is, zoodat het oppervlak van den asymptotischen driehoek gelijk is aan het oppervlak van den cirkel op het grensoppervlak, die de natuurlijke lengteëenheid als straal heeft.

Tengevolge van de aangenomen vlakte-eenheid gaat (7) over in

$$\mathbf{Z} = \mathbf{z}, \qquad (7a)$$

zoodat het oppervlak van een driehoek gelijk is aan zijn defect, uitgedrukt in radialen.

Bepalen we thans het oppervlak van een cirkel. Na het vorige zal het duidelijk zijn, dat we, gebruik makende van (4) kunnen schrijven:

$$\odot x = \int_0^x \bigcirc x \, dx = 2\pi \int_0^x \text{Sh}\, x \, dx = 2\pi (\text{Ch}\, .\, x - 1) = 4\pi\, \text{Sh}^2 \tfrac{1}{2} x.$$

Daar nu op het grensoppervlak twee cirkelomtrekken zich verhouden als hun stralen, kunnen we ook schrijven

$$\odot x = \pi\, \text{Sh}^2 y,$$

als (Fig. 34) $2y$ de rechte is, die als koorde een grensboog onderspant, welke het dubbele is van den boog, dien x onderspant. Daar nu nog uit (6) volgt, dat

$$\text{Sh}\, y = \text{Cotg}\, \Pi (y),$$

is het resultaat als volgt voor te stellen:

$$\odot\, \mathbf{x} = \pi\, \mathbf{Cotg}^2\, \boldsymbol{\Pi} (\mathbf{y}). \qquad (8)$$

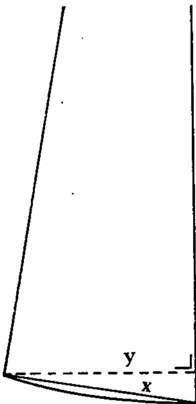


Fig. 34.

We hebben deze oppervlakken bepaald, vooreerst om aan te toonen, dat de verdere ontwikkeling der meetkunde geen andere moeilijkheden ontmoet dan die, welke zich bij de analytische behandeling kunnen voordoen, maar ook om te doen zien, hoe Johann Bolyai aantoont, dat in de meetkunde, waarin het postulaat van Euclides niet geldt, de kwadratuur van den cirkel mogelijk is.

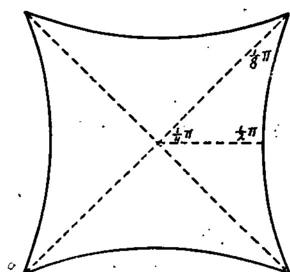


Fig. 35.

Denken we ons nl. een rechthoekigen driehoek, die hoeken $\frac{1}{4}\pi$ en $\frac{1}{8}\pi$ bevat; dan kunnen we 8 van die driehoeken samenvoegen tot een regelmatigen vierhoek met hoeken van $\frac{1}{4}\pi$. Het oppervlak van den vierhoek is

$$8 \times \frac{1}{8}\pi = \pi.$$

Voor den cirkel, die even groot oppervlak heeft, moet $\text{Cotg}^2 \Pi(y) = 1$, dus $\Pi(y) = \frac{1}{4}\pi$ zijn. We kunnen derhalve den straal x van den gevraagden cirkel konstrueeren.

§ 17. Een der merkwaardigste gedeelten in het werk van Johann Bolyai is dat, waarin hij laat zien, dat deze en soortgelijke constructies inderdaad met onze gebruikelijke hulpmiddelen kunnen worden uitgevoerd. Ik zal daarom van deze constructies een en ander mededeelen en daarbij gelegenheid vinden constructies in te lasschen, die van den lateren tijd zijn.

De eerste constructie is deze: *door een gegeven punt een rechte te trekken, evenwijdig met een gegeven rechte.*

Om te kunnen toonen, hoe Bolyai dit werkstuk uitvoert, moet eerst iets medegedeeld worden omtrent de *afstandskromme* en het *afstandsoppervlak.* We zouden trouwens van het werk van Bolyai slechts een zeer onvolledigen indruk krijgen, indien we na de grenskromme en het grensoppervlak ook niet deze figuren bespraken, die bij hem een belangrijke rol spelen.

Na hetgeen we omtrent de grenskrommen en -oppervlakken hebben medegedeeld kunnen we ten aanzien van de nieuwe figuren korter zijn. De afstandskromme, meetkundige plaats der punten, wier afstanden tot een gegeven rechte AB gelijk zijn, heeft alle loodlijnen op AB tot assen van symmetrie. Het afstandsoppervlak ontstaat o.a. door de afstandskromme om een harer assen te laten wentelen. Al zijn punten hebben gelijken afstand tot het vlak, dat door AB bij de wenteling beschreven wordt; alle loodlijnen op dat vlak zijn assen van symmetrie voor het oppervlak. Bij een bepaalden afstand behoort een bepaald afstandsoppervlak, d.w.z. alle afstandsoppervlakken, die bij een bepaalden afstand behooren, zijn congruent. Voor een bepaald afstandsoppervlak bestaat er een bepaalde verhouding van een lijnelement tot zijn projectie op het grondvlak, d.w.z. het platte vlak

waarvan we zijn uitgegaan, en derhalve diezelfde verhouding tusschen een eindige lijn en haar projectie. We gaan deze verhouding bepalen.

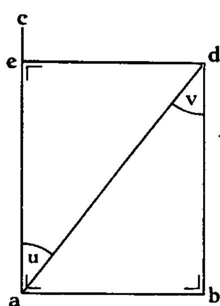


Fig. 36.

Daartoe richten we (Fig. 36) in de punten *a* en *b* eener rechte lijn *ab* loodlijnen *ac* en *bd* op. We trekken nog *de* $\perp$ *ac* uit een punt *d* van *bd*; noemen we *u* en *v* opv. de hoeken *c a d* en *a d b*, dan is in de rechthoekige driehoeken:

$$\bigcirc\, ed : \bigcirc\, ad = \sin u : 1.$$

$$\bigcirc\, ab : \bigcirc\, ad = \sin v : 1.$$

Hieruit volgt:

$$\bigcirc\, ed : \bigcirc\, ab = \sin u : \sin v.$$

Daar nu $\bigcirc$ *ed* een cirkelomtrek is op het afstandsoppervlak, dat *ca* als as en *db* als afstand heeft, en $\bigcirc$ *ab* zijn projectie op het grondvlak, is sin *u* : sin *v* gelijk aan de gezochte verhouding. Deze verhouding moet gelijk blijven, als we *bd* vasthouden, maar *a* zich naar het oneindige laten verplaatsen. Daarbij nadert *u* tot 90° en *v* tot den parallelhoek, die behoort bij den afstand *db*. De gevraagde verhouding is dus het omgekeerde van den sinus van den parallelhoek, behoorende bij den gegeven afstand.

Gaan we thans over tot het vraagstuk: door het gegeven punt D een rechte DM te trekken, die evenwijdig aan de gegeven lijn AN is. Anders gezegd: als DB $\perp$ AN is, vraagt men den hoek Π (DB) te construeeren.

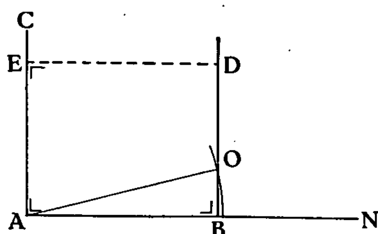


Fig. 37.

We trekken (Fig. 37) AC $\perp$ AN en DE $\perp$ AC, dan is volgens het zooeven gevondene: $\bigcirc$ED : $\bigcirc$ AB $= 1 : \sin z$, als *z* de gevraagde parallelhoek is. Beschrijven we nu echter uit A met DE als straal een cirkel, die DB in een punt O snijdt, dan is in $\triangle$ ABO: $\bigcirc$ AO : $\bigcirc$ AB $= 1 : \sin$ AOB. Daar nu AO $=$ ED is, is $\angle$ AOB $= z$. Hiermede is de uitvoerbaarheid der constructie aangetoond.

§ 18. Als we vasthouden aan de verruimde beteekenis van het

begrip „punt", die we (§ 12) besproken hebben, dan is de zooeven uitgevoerde constructie slechts één der constructies, waartoe aanleiding geeft het vraagstuk: de verbindingslijn van twee gegeven punten te trekken. We kunnen de 6 constructies als volgt aanduiden: een rechte te trekken 1° door P_1 en P_2, 2° door P_1 en E_2, 3° door P_1 en I_2, 4° door E_1 en E_2, 5° door E_1 en I_2, 6° door I_1 en I_2; P stelt dan een gewoon punt of hoekpunt, E een eindpunt, I een ideaal punt voor.

De onder 2° genoemde, die beteekent: door een punt een rechte te trekken, evenwijdig met een gegeven rechte, hebben we zooeven uitgevoerd. De onder 3° genoemde beteekent: door een punt een loodlijn op een gegeven rechte trekken; hiervoor blijft de constructie uit de Euclidische meetkunde geldig.

De onder 4° genoemde beteekent: een rechte te trekken, die eenerzijds evenwijdig is met de eene, anderzijds met de andere van twee gegeven snijdende rechten. Deelen we den hoek der beide rechten middendoor, dan is de constructie teruggebracht tot de onder 5de genoemde, nl.: een rechte te trekken, die loodrecht is op het eene en evenwijdig met het andere been van een gegeven hoek. We gaan thans tot deze constructie over, die ook aldus uit te drukken is: *bij gegeven parallelhoek $\Pi(p)$ den afstand p te construeeren,* [1] *en* dus het omgekeerde van de zooeven uitgevoerde constructie is.

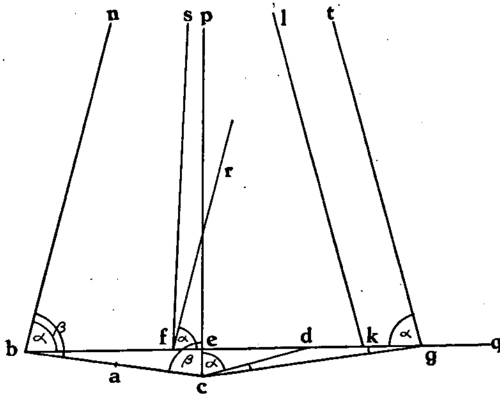


Fig. 38.

Zij (Fig. 38) $\angle nbq = \alpha$ de gegeven hoek. Neem dan een afstand *ba,* zóódanig, dat de hierbij behoorende parallelhoek grooter dan α is. Zij die hoek β; trek dan *ba* zoo, dat $\angle nba = \beta$ is, en verleng *ba* met een stuk *ac,* dat gelijk aan *ba* is. Trek nu $cp // bn$, dan is ook $\angle bcp = \beta$ en cp snijdt *bq* ergens in *e.* Teeken vervolgens *cd* zóó, dat $\angle pcd = \alpha$ is, dan zullen we bewijzen, dat *cd* de lijn *bq*

[1]) Van het bestaan van den afstand *p* gaven we in § 8 het bewijs volgens Lobatschefsky.

snijdt. Daartoe merken we op, dat in $\triangle$ *bce* $\angle$ *cbe* $< \beta = \angle$ *bce* is, zoodat *ec* $<$ *eb* is, en passen *ec* op *eb* af, waardoor het punt *f* gevonden wordt. Door *f* trekken we de rechte *fr*, zóó dat $\angle$ *r f d* $= \alpha$ is, en *fs*//*ep*. Dan ligt *fs* binnen $\angle$ *bfr*, omdat *fr* de lijn *ba* niet snijdt (wegens de gelijke overeenkomstige hoeken) en *fs*//*bn* is. Uit het feit, dat *fr* binnen $\angle$ *efs* ligt, volgt nu dat *fr* de lijn *ep* snijdt, maar hieruit volgt, dat ook *cd* de lijn *bq* ergens in een punt *d* moet snijden.

Neem nu op *dq* een punt *g*, zoodat *dg* $=$ *dc* is, verbind *c* met *g*, en trek door *g* de rechte *gt*, zoodat $\angle$ *dgt* $= \alpha$ is.

We hebben nu een $\triangle$ *bcg* laten ontstaan en door de hoekpunten lijnen *bn, cp* en *gt* weten te trekken zóódanig, dat *bn* en *cp* met *bc*, *cp* en *gt* met *cg*, *gt* en *bn* met *bg* gelijke hoeken maken.

Denken we nu, dat de grenskromme, die door *b* gaat en *bn* als as heeft en dus ook door *c* gaat en *cp* als as heeft, *niet* door *g* zou gaan, dan zou zij door een ander punt *k* van *bg* gaan en *kl* als as hebben. Dan zou $\angle$ *bkl* $= \alpha = \angle$ *pcd* zijn; echter is ook $\angle$ *pck* $= \angle$ *lkc*, dus is *dk* $=$ *dc* en *k* valt in *g*. Hieruit volgt,, dat *gt*//*bn* is en de rechte, die *bg* loodrecht halveert, bepaalt op *bq* den gezochten afstand.

§ 19. Van de 6 in § 18 genoemde constructies is nog overgebleven de onder 6° aangegevene: *de rechte te trekken, die twee niet-snijdende rechten loodrecht snijdt.* We hebben reeds vroeger (§ 10) het bestaan van zulk een rechte aangetoond; thans geven we de constructie, tevens het existentiebewijs, van Hilbert.

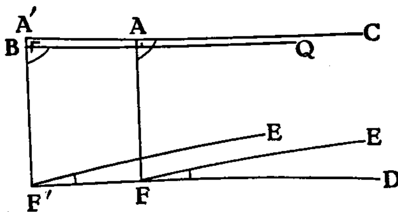


Fig. 39.

AC en FD zijn de beide gegeven niet-snijdenden. Neem nu op AC de punten A en A' en trek daaruit AF en A'F', beide $\perp$ FD. We mogen onderstellen, dat de beide loodlijnen ongelijk van lengte zijn; immers, zijn zij gelijk, dan is de verbindingslijn van de middens van AA' en FF' reeds de gezochte gemeenschappelijke loodlijn. Zij nu A'F' $>$ AF; dan nemen we F'B $=$ FA en trekken BQ zoodanig, dat $\angle$ QBF' $= \angle$ CAF is. We moeten nu vooreerst bewijzen, dat BQ de lijn A'C ergens moet ontmoeten. Trek daartoe FE//AC en F'E' zoodanig, dat E'F'D $= \angle$ EFD is. Nu zal F'E' de lijn FE

niet ontmoeten (wegens de gelijke overeenkomstige hoeken); zij is echter niet //AC, omdat ze anders ook met FE evenwijdig zou zijn; dus zal zij AC ontmoeten. Dan zal echter BQ, die //F′E′ is, AC moeten snijden. Noemen we nu Q het snijpunt van BQ en AC (Fig. 40). We passen op AC het stuk AQ′ = BQ af. Uit congruentie van figuren blijkt nu onmiddellijk, dat de afstanden der punten Q en Q′ tot FD gelijk zijn, zoodat de loodlijn, uit het midden van QQ′ op FD neergelaten, de gevraagde rechte is.

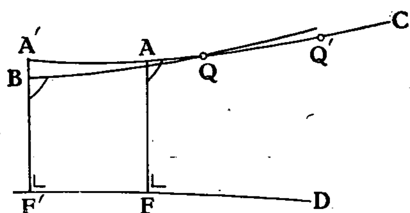


Fig. 40.

§ 20. We bespreken nog een tweetal eenvoudige constructies, die we voor het volgende noodig hebben. In de eerste plaats willen we de rechte construeeren, die midden tusschen twee gegeven evenwijdige lijnen gelegen is. Daartoe kunnen we gebruik maken van de hier nog steeds geldende stelling, dat de bisectrices van de hoeken van een driehoek door één punt gaan. We trekken derhalve een rechte, die de beide gegeven evenwijdige rechten snijdt en deelen de hoeken middendoor, welke zij met beide maakt; hiermede is één punt der gezochte rechte gevonden. Veder kunnen we òf op dezelfde wijze nog een tweede punt bepalen, òf den hoek halveeren, die gevormd wordt door de loodlijnen, uit het gevonden punt op de gegeven rechten neergelaten.

Met behulp van deze constructie kunnen we op twee evenwijdigen correspondeerende punten teekenen, door een punt op de eene lijn te spiegelen ten opzichte van de zooeven gevonden rechte, die midden tusschen de twee gelegen is. Het is ook duidelijk, dat we op deze wijze een willekeurig aantal punten kunnen construeeren van de grenskromme, waarvan een punt en een as gegeven zijn.

In de tweede plaats voeren we nog de constructie uit: een lijnstuk van gegeven lengte p tusschen twee evenwijdigen (m en n) te plaatsen, zóó dat het op een der twee, b.v. n, loodrecht is. Daartoe nemen we (Fig. 41) op de eene rechte m een punt Q zóó, dat de loodlijn uit Q op de andere grooter is dan het gegeven lijnstuk p. We passen nu p op F′Q af en vinden zoo het punt P′; door dit punt

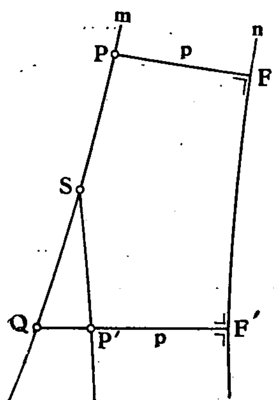


Fig. 41.

trekken we een rechte, die met n evenwijdig is, doch in tegengestelden zin als de eerste.

Maken we nu SP = SP′, dan is de loodlijn PF de gevraagde lijn.

§ 21. We kunnen thans overgaan tot constructies, waarbij van grensbogen wordt gebruik gemaakt. In de vorige § zagen we reeds, dat we van de grenskromme een willekeurig aantal punten kunnen construeeren. We hebben echter voor onze constructies den grensboog zelf in het geheel niet noodig, maar kunnen, zooals Johann Bolyai heeft aangegeven, met grensbogen, zoodra de uiteinden slechts gegeven zijn, alle constructies uitvoeren, die men in de gewone meetkunde met rechte lijnen uitvoert.

Laat b.v. gevraagd worden de som van twee grensbogen te construeeren, die beide door hun uiteinden gegeven zijn. We deelen dan de koorden der gegeven grensbogen loodrecht middendoor, trekken evenwijdige lijnen door de uiteinden, en passen de figuren aan elkaar.

Laat voorts gevraagd worden een grensboog, door de beide uiteinden gegeven, in een aantal van n gelijke deelen te verdeelen. We nemen 2 evenwijdigen, spiegelen de eerste ten opzichte van een tweede en verkrijgen aldus een derde. We gaan op deze wijze voort, totdat er $n + 1$ evenwijdigen ontstaan zijn. We teekenen door de uiteinden van den gegeven grensboog de assen en laten uit het eene uiteinde de loodlijn neer op de as van het andere uiteinde. Passen we nu op de eerste en de laatste der zooeven verkregen $n + 1$ evenwijdigen de in § 20 besproken constructie toe van het plaatsen van een lijnstuk van gegeven lengte tusschen die rechten, zóó dat het loodrecht op een van beide staat, dan zal de verdere constructie vanzelf duidelijk zijn.

Op overeenkomstige wijze kan men bij 3 gegeven grensbogen de vierde evenwijdige construeeren.

Om bij twee gegeven grensbogen de middelevenredige te construeeren, denken we eerst de bogen geplaatst op eenzelfde grenskromme op het grensoppervlak. We denken voorts op hun som als middellijn een halven cirkel op dat oppervlak beschreven;

op de wijze als in de gewone meetkunde geeft dan een boog, loodrecht op die middellijn, de gevraagde grenskromme. Uit het vorige zal duidelijk zijn, hoe we deze constructie in het platte vlak kunnen uitvoeren.

Uit deze enkele constructies blijkt, hoe we alle planimetrische constructies voor het grensoppervlak met behulp van liniaal en passer kunnen uitvoeren in het platte vlak door de grensbogen door middel van hun eindpunten aan te geven. Zoo zullen we b.v. ook op het grensoppervlak een hoek van 360° in p gelijke deelen kunnen verdeelen voor alle woorden van p, voor welke het in de gewone meetkunde mogelijk is. Daardoor kunnen we dan ook in het vlak van Gauss alle regelmatige veelhoeken met passer en liniaal construeeren, voor welke dit in het Euclidische vlak mogelijk is.

Ik meen thans te hebben duidelijk gemaakt, dat niet alleen langs den weg der berekening, maar ook langs dien der constructie de thans beschouwde meetkunde zich verder laat ontwikkelen.

§ 22. Nu ik hiermede een, zij het ook eenigszins vluchtig, denkbeeld van de Meetkunde van Gauss heb trachten te geven, zou ik mijn taak als ten einde gebracht kunnen beschouwen. Echter wil ik aan het vorige nog een korte beschouwing toevoegen, omdat het medegedeelde bij degenen, die van deze zaken weinig studie mochten hebben gemaakt, vragen zal doen rijzen, omtrent wier beantwoording ik toch een enkel woord moet zeggen. Die vragen betreffen de „geldigheid" der Euclidische meetkunde, d. w. z. hare toepasselijkheid in de ruimte onzer waarnemingen, in verband met den willekeur, waarmede we in het stel axioma's, waarop die meetkunde rust, wijziging hebben aangebracht.

Van zuiver formeel standpunt is het wijzigen van het stelsel axioma's der meetkunde, zooals we deden, toen we het postulaat van Euclides hebben vervangen door dat van Lobatschefsky, een volkomen geoorloofde daad, daar in de deductieve wetenschap, die we meetkunde noemen, elk volgend oordeel uit voorafgaande ontwikkeld, en dus alles afgeleid is uit een stelsel axioma's, dat we vóórop plaatsen, en dat alleen heeft te voldoen aan de eischen, dat het volledig is en zonder innerlijke afhankelijkheid en strijdigheid. Dit dringt echter de vraag naar voren, hoe het mogelijk is, dat de bijzondere soort meetkunde, die op de Euclidische axioma's is opgebouwd, zooveel gemakkelijker dan andere soorten toepas-

baar is op de wereld onzer ervaring, zooals toch op allerlei gebied van experimenteele wetenschap en techniek blijkt; hetgeen neerkomt op de kennistheoretische vraag: van welken aard dan eigenlijk onze meetkundige axioma's zijn en waar men hun oorsprong heeft te zoeken.

Dit is een vraag, die de denkers, zij het ook niet altijd in de eerste plaats de wiskundigen zelf, van de oudste tijden af heeft bezig gehouden, en omtrent wier beantwoording men het nog in het geheel niet eens is. Wanneer we afzien van het eigenlijke empirisme, dat de meetkunde ontstaan denkt door abstractie, generalizeering en idealizeering van de zintuigelijke ervaring (bij welke opvatting de meetkundige stellingen, evenals de natuurwetten, slechts benaderde juistheid hebben), en ons derhalve bepalen tot de z.g. idealistische opvatting, waarbij men gelooft in het subjectieve karakter, dat de wiskunde als gevolg van onze geestelijke structuur, onafhankelijk van de ervaring, heeft, dan blijft er ruimte voor velerlei meening. Maar zulk een ruimte blijft nog bestaan, als we buiten beschouwing laten de z.g. vrij-axiomatische richting, die zóó ver gaat, dat ze slechts de wetten der formeele logica als richtsnoer aanvaardt, en zich noch om het verband met de ervaringswereld, noch om de voorstelbaarheid bekommert. We houden daarbij over het intuitionisme, en wel een klassiek intuitionisme (Plato, Kant) en een modern in verschillende schakeeringen (Russell, Brouwer).

In de idealistische opvatting van Plato speelt de empirie een zekere rol. Immers sluimeren volgens hem in onze ziel de mathematische vormen; de ervaring doet niet anders dan de ziel opwekken tot bezinning op die vormen, waarna echter de ziel alle banden met de ervaring verbreekt. Om te verklaren, hoe zij tot het bezit van die vormen gekomen is, onderstelt hij, dat de menschelijke ziel in een vroeger bestaan vóór de geboorte op aarde de wiskundige waarheden door onmiddelbare aanschouwing heeft leeren kennen, en dus nu, door herinnering alleen, van haar weet. Opmerkelijk is, dat hier de ervaring wederom een rol speelt, al is het ook niet de ervaring der zinnen gedurende het bestaan op aarde.

Feitelijk is er géén verschil tusschen deze opvatting en de meening van Felix Klein, die hij tot uitdrukking brengt door te zeggen, dat men zich bij het opstellen der axioma's door de waarneming laat inspireeren, maar er zich daarna zoo spoedig mogelijk van los maakt.

Vooral van beteekenis is de opvatting van Kant, zooals wij die uiteengezet vinden in zijn „Kritik der reinen Vernunft", die in 1781 verscheen en de twee jaren later verschenen „Prolegomena", die dienen moesten om het groote werk beter verstaanbaar te maken, en welke opvatting met de zooeven genoemde groote gelijkenis vertoont. Voor den mathematicus is het werk van Kant ook daarom zoo belangrijk, omdat het vermoeden gerechtvaardigd schijnt, dat de uitspraken van Kant als dieper liggende oorzaak te beschouwen zijn van het feit, dat omstreeks het begin der vorige eeuw de drie mannen, die we in het vorige herhaaldelijk hebben genoemd (waarbij wij de vraag in het midden mogen laten, of zij geheel onafhankelijk van elkaar tot het inzicht kwamen) ongeveer gelijktijdig het inzicht in de slechts betrekkelijke „waarheid" der meetkundige axioma's veroverden.

Voor Kant waren de meetkundige axioma's (waarmede o.a. bedoeld worden de bewering dat de ruimte 3-dimensionaal is, en het parallellen-postulaat van Euclides) voorbeelden van synthetische oordeelen (d.w.z. oordeelen omtrent een ding, die niet reeds in zijn definitie besloten zijn) a priori (waarmede te kennen gegeven wordt, dat zij aan de ervaring vóóraf gaan, dus daarop niet berusten). Hij twijfelt er niet aan, dat zij het zijn, maar stelt de vraag: hoé zijn zulke synthetische oordeelen a priori mogelijk? Hij verklaart dan die synthetische oordeelen a priori aangaande de ruimte door de ruimte te beschouwen als vorm der gewaarwording („Anschauung"), dus als een zekere wetmatigheid, die aan ons gewaarwordend bewustzijn eigen is; daardoor is alles, wat wij kunnen waarnemen of als waarneembaar ons voorstellen, aan die wetten onderworpen; die wetten gelden dus a priori.

Het is te begrijpen, dat, in verband met deze beschouwingswijze van Kant, de opstelling van de Niet-Euclidische Meetkunde groot opzien heeft gebaard (in het bijzonder echter in de tweede helft der vorige eeuw) en dat de meening uitgesproken is en wordt, dat door de opstelling van die meetkunde de opvatting van Kant onhoudbaar is geworden. Uit de literatuur, die betreffende dit punt bestaat, wensch ik Uw aandacht te vestigen op de voordracht van Helmholtz, die tot opschrift voert: „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiomen," en waarin hij op de beschouwing van Kant kritiek uitoefent, maar daarbij ook verschillende nieuwe en belangwekkende punten in bespreking brengt.

Zoo spreekt hij over de praktische metingen, die men heeft willen verrichten om zich zekerheid te verschaffen omtrent de vraag, of in onze ruimte de Euclidische Meetkunde geldt. Bij de metingen blijkt, dat er geen aanwijsbare afwijking van deze meetkunde bestaat; beter gezegd: dat er geen bezwaar bestaat, deze meetkunde op de physische ruimte toe te passen. Helmholtz vestigt er nu echter de aandacht op, dat het bij al onze metingen lichtstralen zijn, die we als rechte lijnen beschouwen en dat wij ons bedienen van meetwerktuigen, die we als vaste lichamen beschouwen, zoodat we uitgaan van onderstellingen omtrent de gedragingen van lichamen, die wij vast noemen.

Deze opmerking (het worde medegedeeld ten einde misverstand te voorkomen) wordt door Helmholtz niet gemaakt met het doel Kant te bestrijden. Immers hebben juist Kant en de aanhangers van zijn leer er zich met kracht tegen verzet, als men door middel van een experiment wilde uitmaken, of de Euclidische meetkunde de ware is of niet. Bij de hiertegen ontwikkelde bezwaren heeft men echter dikwijls twee geheel verschillende dingen met elkaar verward; het is niet mogelijk door metingen na te gaan of een logisch stelsel, zooals de meetkunde is, juist is of niet; maar wel is het mogelijk, te zien, of zulk een meetkundig stelsel toepasbaar is op de reëele dingen.

Helmholtz maakt de opmerking naar aanleiding van de vraag of de grondslagen der Euklidische meetkunde van empirischen oorsprong zijn, nadat hij heeft toegelicht, met behulp van de logische mogelijkheid der Niet-Euclidische Meetkunde, dat zij géén noodzakelijke eigenschappen van ons denken zijn. De mogelijkheid bleef nu nog over, dat de Niet-Euclidische meetkunde weliswaar logisch zonder contradictie denkbaar zou zijn, maar dat niettemin de Euclidische meetkunde toch de uitsluitende vorm was, waarin ons bewustzijn de uitwendige ervaring kon verwerken. Men kon m.a.w. volhouden, dat de Niet-Euclidische meetkunde wel denkbaar, maar niet voorstelbaar was, dat ze slechts een hersenschim mocht heeten naast de echte meetkunde (een opvatting, die tegenwoordig nog algemeen voorkomt). Helmholtz nu heeft deze mogelijkheid weerlegd door de vraag te behandelen of het ons mogelijk is, ons een voorstelling te vormen van de indrukken, die een pseudosferische wereld, d.w.z. een wereld, waarin de meetkunde van Gauss geldt, op ons, die aan een Euclidische wereld gewoon zijn, zou maken.

Hij laat dan zien, dat dit ons wel degelijk mogelijk is en redeneert daarbij ongeveer als volgt.

We denken ons een waarnemer, die gewoon is aan een Euclidische wereld en die dus door middel van ervaringen, verkregen eenerzijds door eigen verplaatsing en door tastproeven, anderzijds door middel van gezichtsgewaarwordingen, geleerd heeft, zich, op één plaats blijvende, door middel van de oogen alléén van de ligging en den vorm der dingen in de ruimte een voorstelling te maken. We vragen, hoe het hem gaan zou, indien hij werd geplaatst in een pseudosferische wereld.

Helmholtz maakt nu gebruik van een bekende afbeelding, die Beltrami gegeven heeft en waarbij de pseudosferische ruimte wordt afgebeeld binnen een boloppervlak in een Euclidische ruimte zóódanig, dat de rechte lijnen der pseudosferische ruimte correspondeeren met de rechte lijnen der Euclidische; het oppervlak van den bol correspondeert met het „oneindige" der pseudosferische ruimte. Om deze afbeelding te ontgaan geef ik van het volgende een eenigszins gewijzigde voorstelling.

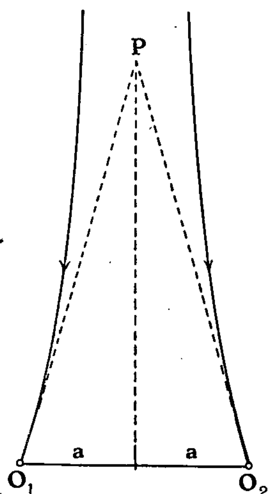


Fig. 42.

Indien onze waarnemer den blik gericht houdt op een punt, dat in de pseudosferische ruimte oneindig ver weg gelegen is, dan zijn de oogen correspondeerende punten op de evenwijdige lichtstralen, die het waargenomen punt met de beide oogen verbinden; de lichtstralen maken met de lijn O_1 O_2 (Fig. 42), die de oogen verbindt, hoeken Π (a), als $2a$ de afstand der oogen is. De gezichtsassen der oogen zullen zich stellen in de richting, waarin zij door de stralen getroffen worden, en de waarnemer, die gewoon is aan door lichtstralen gevormde driehoeken, die een hoekensom van 180° hebben, vermoedt de plaats van het waargenomen punt in P. Hij zou zijn vergissing bemerken, indien hij zich ging bewegen in de richting van P, omdat hij zou waarnemen, dat hij daarbij niet tot het punt naderde. Blijft hij echter op zijn plaats, dan vermoedt hij het waargenomen punt op een afstand $a \; tg \; \Pi \; (a)$. Wij maken daarbij de onderstelling, dat onze afstandsschatting berust alléén

op den hoek der gezichtsassen, en dat daarbij dus het accommodatievermogen geen rol speelt.

Is a uitgedrukt in de absolute lengte-eenheid der pseudosferische ruimte, dan is volgens (6)

$$a \operatorname{tg} \Pi(a) = \frac{a}{\operatorname{Sh} a}.$$

Is a voldoende klein, dan kunnen we dezen breuk door de eenheid vervangen, en we komen tot het resultaat, dat de waarnemer alle lichamen, die zich inderdaad op oneindigen afstand bevinden, meent te zien op een boloppervlak, dat die lengte-eenheid als straal heeft, zoodat voor hem de wereld binnen dien bol besloten is.

Verder is gemakkelijk na te gaan, [1]) dat op hem alle dingen een te kleinen indruk maken en wel des te erger, naarmate zij verder weg gelegen zijn, en dat hij ook de vorm der lichamen verkeerd beoordeelt, daar hun diepteafmeting sterker verkleind wordt dan de andere afmetingen. Hij ziet alle dingen afgeplat in de gezichtslijn.

Wij kunnen ons dus een voorstelling maken van de indrukken, die de waarnemer zou ontvangen. Dit wordt ons nog gemakkelijker gemaakt doordat we een geheel analoog beeld van onze wereld verkrijgen, indien we haar bezien door een concave lens, die de genoemde lengte tot brandpuntsafstand heeft. Indien deze, zonder dat we het wisten voor onze oogen geplaatst werd, dan zouden we, alleen op de gezichtsgewaarwording afgaande, tot een analoog onjuist resultaat komen bij de beoordeeling van afstand en vorm der dingen, als wanneer we in een pseudosferische wereld werden geplaatst. We zouden echter na korten tijd door gecombineerde ervaringen opgedaan door oog en tastzin ons aan het dragen van den bril gewend hebben. En zoo zou ook de waarnemer,

---

[1]) Voor een willekeurig punt lezen we uit een figuur dadelijk af, dat, als zijn afstand tot ons oog groot is ten opzichte van $2a$, bij benadering geldt:

$$d = \mathrm{T}h\ d,$$

als d de afstand is, waarop het waargenomen punt zich bevindt, en d' de afstand, waarop het gezien wordt (uit deze betrekking zien we, dat onze afbeelding met die van Beltrami identiek is). De juistheid der bewering is hieruit af te leiden.

na eenigen tijd in de pseudosferische wereld verkeerd te hebben, zich daarin geheel thuis voelen. [2])

De axioma's van de meetkunde kunnen dus ook met ons voorstellingsvermogen niet samenhangen.

Ik ga op de beschouwingen van Helmholtz niet verder in. Het vorige diende slechts om eenigen indruk te geven van de vragen, waartoe de wijziging in de axioma's der meetkunde aanleiding heeft gegeven.

---

[2]) Hierbij moet opgemerkt worden, dat de aanhangers van de theorie van den psychologischen oorsprong onzer voorstelling van een Euclidische ruimte het volgende argument tegen de redeneering van Helmholtz inbrengen: de mogelijkheid bestaat, dat bij de totstandkoming van onze ruimte-voorstelling gezichtsgewaarwordingen slechts een secundaire rol spelen en tast- en bewegingsgewaarwordingen de primaire (mogelijkheid van meetkundig voorstellingsvermogen bij blindgeborenen). Wanneer Helmholtz dus wil bewijzen, dat een Niet-Euclidische ruimte voor te stellen is, dan moet hij niet alleen de gezichtsgewaarwordingen in zulk een ruimte schilderen, maar ook de tast- en bewegingsgewaarwordingen. Zoolang hij dit niet doet, bestaat de mogelijkheid, dat deze gewaarwordingen van zoodanigen aard zouden zijn, dat ze de gezichtsgewaarwordingen zouden corrigeeren en dat de combinatie toch weer den indruk zou wekken, dien de Euclidische ruimte ook wekt.

BOEKBESPREKING.

Dr. M. de Haas, Thermodynamika. Deel I van Noordhoff's Natuurkundige Bibliotheek. Groningen 1927.

De Thermodynamika van Prof. Dr. M. de Haas, hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool te Delft, vormt het eerste deel van de Natuurkundige Bibliotheek, die de heer Noordhoff naast zijn nu reeds alom bekende reeks van wiskundige werken zal laten verschijnen. Dit geeft mij aanleiding om alvorens over het werk zelf te spreken, mijn vreugde te uiten over het nieuwe initiatief van den ondernemenden uitgever, wiens werkzaaamheid in het belang van de beoefening der exacte wetenschappen algemeene waardeering en steun verdient. Er bestaat inderdaad behoefte aan een reeks van werken, zooals het plan der nieuwe uitgave ze ons in het vooruitzicht stelt; niet alleen voor de studenten aan de Universiteiten en de Technische Hoogeschool, die er een betrouwbaren steun bij hun studie in zullen kunnen vinden, maar vooral ook voor categorieën als die, waartoe de meeste lezers van dit tijdschrift zullen behooren, afgestudeerden, die buiten het dagelijksche contact met het actieve wetenschappelijke leven, gevaar loopen hun wetenschappelijke ontwikkeling te zien dalen beneden het peil, waarop zij stond, toen zij de universiteit verlieten en die dat gevaar alleen kunnen bezweren, door geregeld te blijven kennis nemen van nieuw verschijnende leer- en handboeken.

Wij kunnen nu, het eerste deel der nieuwe reeks beschouwende, geen beteren wensch uitspreken dan deze, dat het door alle volgende moge worden geëvenaard in degelijkheid van inhoud en helderheid van schrijfwijze. Inderdaad, de voornaamste indruk, dien dit boek achterlaat, is deze, dat de schrijver een voortreffelijk docent moet zijn; wat hij schrijft, is althans alles even eenvoudig en doorzichtig helder uitgedrukt en we hebben alle reden ons te verheugen, dat hij met dit boek zijn werkzaamheden tot buiten de collegezalen der Technische Hoogeschool heeft uitgebreid.

De schrijver, die zijn werk laat aansluiten bij den graad van ontwikkeling, die bij oud-leerlingen van een H. B. S. of Gymnasium kan worden verwacht, heeft er naar gestreefd, overal de grondslagen der theorie zoo volledig mogelijk te behandelen. Het eerste gedeelte handelt over de eerste hoofdwet der Thermodynamica en hare toepassingen op chemische omzettingen en calorische werktuigen. Een afzonderlijk hoofdstuk, uit den aard der zaak voornamelijk refereerend, is aan de kinetische theorie der lichamen gewijd; hierbij komt ook de toepassing van de theorie der quanta op de verklaring van de soortelijke warmte van twee- of meeratomige gassen ter sprake; van de daarbij optredende constante, die het voorhanden breukdeel der volgens de wet der aequipartitie te verwachten totale trillingsenergie aangeeft,

wordt later nog een afleiding gegeven. Het tweede deel van het werk bespreekt de tweede hoofdwet, die op zeer duidelijke wijze wordt ingeleid; het derde de toepassing van de beide hoofdwetten op physische en chemische verschijnselen. Een afzonderlijk hoofdstuk van het derde deel is gewijd aan het warmtetheorema van Nernst.

Wanneer ik me een opmerking aangaande de uiteenzettingen van den schrijver mag veroorloven, zou ik willen vragen, of hij niet op blz. 3 de eerste hoofdwet der thermodynamica te weinig onderscheidt van het algemeenere energieprincipe? Dit laatste toch postuleert (zou voor vele lezers een nadere uiteenzetting van dit begrip niet wenschelijk zijn geweest?), dat de totale energie in een afgesloten systeem bij alle daarin optredende omzettingen constant is, terwijl de eerste hoofdwet slechts de bijzondere toepassing van dat postulaat is op die gevallen, waarin de energievorm warmte optreedt. De op blz. 3 voorkomende conclusie, dat de in een galvanisch element verdwenen chemische energie in eersten aanleg gelijk moet worden gesteld aan de energie van den electrischen stroom, dien het element levert, kan dus niet op grond van de eerste hoofdwet, maar kan slechts met behulp van het energieprincipe worden getrokken. In verband hiermee staat, dat de formuleering van het perpetuum mobile van de eerste soort te eng is.

Wanneer zal het gallicisme „Hoeveelheid van beweging" eens verdwijnen, deze ergerlijke vertaling van „quantité de mouvement"? Zeggen wij misschien in het Hollandsch voor „une quantité de pain" ook „een hoeveelheid van brood"? En deze uitdrukkingen zijn toch volkomen analoog. Immers quantité de mouvement (quantitas motus) is een term, dateerend uit den tijd, toen men de grootheid „beweging" van den toestand „beweging" onderscheidde en nu behoefte had aan een term, om die onderscheiding uit te drukken; zoo kwam men tot „hoeveelheid beweging." Het ware echter wenschelijk, dat wij deze uitdrukking niet langer bewaarden. Waarom zegt men niet impuls, of, als men dit woord voor de tijdintegraal van de kracht wil behouden, impetus?

E. J. Dijksterhuis.

Inleiding tot de leer der Verzamelingen door B. P. Haalmeijer en J. H. Schogt. P. Noordhoff, Groningen 1927.

Een sierlijk uitgevoerd boekje, dat van de hand van de heeren Haalmeijer en Schogt een, naar de schrijvers zelve zeggen, echte „inleiding" tot de leer der verzamelingen, bestemd voor hen, die van het onderwerp niets of zeer weinig afweten, wil geven.

Wie zich even indenkt in de taak, die de schrijvers zich hiermede gesteld hebben, zal dadelijk begrijpen, voor welke moeilijkheden de schijnbaar eenvoudige onderneming hen moet hebben geplaatst. De leer der verzamelingen toch verkeert, juist wat hare fundeering betreft, in een crisis-periode; over de grondbegrippen bestaat nog geenszins eenstemmigheid en veel van wat de eene partij bouwt op fundamenten, die zij als vast aanvaardt, wordt door de andere als zinledig

luchtkasteel verworpen. Nu zijn de schrijvers juist opgevoed in een school, die op tal van begrippen en resultaten der zich vrij ontwikkelende Mengenlehre een kritiek heeft uitgeoefend, die zelfs voor een van de klassieke principes der logica niet is teruggedeinsd en die van het wiskundig denken over het oneindige een graad van strengheid eischt, waartoe eerst langdurige mathematische scholing in staat stelt. Men begrijpt het gevolg: een voortdurend conflict tusschen hun critischen blik op redeneeringen, die de klassieke theorie zonder bedenking aanvaardde, maar die het intuitionisme verwerpt en hun oprechten wensch, om elementair en duidelijk te blijven met als gevolg de noodzakelijkheid, zich toch in hoofdzaak naar de klassieke theorie te richten.

Ik wil dadelijk erkennen, dat zij dit probleem op zeer bevredigende wijze hebben opgelost; zij zijn niet dogmatisch geweest, ze hebben noch formalisme, noch intuitionisme consequent beleden en ze hebben, dank zij hun overtuigend helderen schrijftrant (waartoe in het voorbericht dat soort excuus over hun duidelijkheid?), een werkje geschapen, dat aan zijn doel ten volle beantwoordt. Het zal eenerzijds voor den aandachtigen lezer, die over eenig vermogen tot abstract denken beschikt, geen onoverkomelijke moeilijkheden opleveren en wanneer het in onzen tijd niet tot een axioma ware geworden, dat men bij het verwerven van geestelijke ontwikkeling op de wiskunde geen acht behoeft te slaan, zou men het ook in volle gerustheid kunnen aanbevelen aan lezers, die van de mathesis geen speciale studie hebben gemaakt. Anderzijds echter houdt het toch geenszins een verloochening in van de strenge eischen, die het intuitionisme aan redeneeringen over het oneindige heeft leeren stellen.

Men zou alleen kunnen vragen, of de schrijvers niet beter hadden gedaan, die eischen niet alleen, voorzoover mogelijk, te bevredigen, maar ze tevens wat meer toe te lichten. Zoo hebben ze, om een voorbeeld te noemen, het theorema van Bernstein niet opgenomen, omdat de hiervoor gegeven bewijzen niet algemeen worden erkend. Zou het niet instructiever zijn geweest, indien ze b.v. het bewijs van Bernstein zelf, dat door Borel in zijn *Leçons sur la théorie des fonctions* is gepubliceerd, hadden meegedeeld en daarna de bezwaren hadden uiteengezet, die het intuïtionisme tegen deze wijze van redeneeren heeft? Ook wijden ze wel in een noot op blz. 2 een beschouwing aan Brouwer's bezwaren tegen de toepassing van het principium tertii exclusi in oneindige systemen, maar deze beschouwing is te kort, om voor den niet reeds eenigszins ingewijden lezer begrijpelijk te zijn. Immers zij vermelden eerst, dat Brouwer in zijn systeem verzamelingen opneemt, die noch eindig, noch oneindig zijn, noemen dan als voorbeeld van zulk een verzameling de verzameling van de geheele positieve getallen n, zoodanig, dat het n^e en het $(n+1)^e$ cijfer in de decimale ontwikkeling van π gelijk zijn en motiveeren daarna dit voorbeeld door de opmerking, dat men op het oogenblik geen kans ziet, een methode aan te geven, die na een eindigen tijd hetzij de eindigheid, hetzij de oneindigheid der bedoelde verzameling kan leeren. De klassiek-logisch denkende lezer zal hier allicht het verband tusschen bewering en voorbeeld niet zien. Hij zal toegelicht willen hebben, met

welk recht het intuitionisme uit het feit, dat men tot dusver niet heeft kunnen uitmaken, of de beschouwde verzameling eindig of oneindig is, mag concludeeren, dat zij dus noch eindig, noch oneindig is. Hij zal misschien vragen, of men uit het feit, dat men tot dusver niet heeft kunnen uitmaken, of het getal e^{π} algebraïsch of transcendent is, nu ook mag concludeeren, dat er dus getallen bestaan, die noch algebraïsch, noch transcendent zijn en de overtuiging, dat het intuitionisme op deze vragen wel bevredigend zal kunnen antwoorden, zal hem weinig helpen in de verwarring, die de lezing van de noot op blz. 2 in zijn denken heeft aangericht.

Intusschen, we hebben de beperking te aanvaarden, die de schrijvers zich zelf hebben opgelegd. Dit doende, zou ik nog enkele opmerkingen willen maken.

Daar de schrijvers het theorema van Bernstein niet aanvaarden, moeten ze onderscheid blijven maken tusschen het „gelijk" of „hetzelfde" zijn en het „evengroot" zijn van twee machtigheden. Zou het echter niet taalkundig zuiverder zijn, „gelijk" als synoniem met „even groot" te beschouwen, dus van twee verzamelingen, welker elementen een-eenduidig aan elkaar zijn toe te voegen, te zeggen, dat ze dezelfde machtigheid hebben en de machtigheden van twee verzamelingen, waarvan elk een deelverzameling bezit, aequivalent met de andere, gelijk of evengroot te noemen? Het is moeilijk, deze twee uitdrukkingen te scheiden; op blz. 59 vergissen de schrijvers zich zelf, wanneer ze zeggen, dat een afgesloten puntverzameling eindig of aftelbaar is of een machtigheid heeft, *gelijk* aan de continue.

Taalkundig ongewenscht lijkt het ook, dat de schrijvers op blz. 21 de orderelatie, die zij met *hooger dan* of *grooter dan* betitelen, ook *voor*, de omgekeerde relatie *na* noemen. Waarom niet juist andersom? Nu moeten we op blz. 22 zeggen, dat in de rij der natuurlijke getallen, naar opklimmende grootte geordend, 4 (dat hooger dan 3 genoemd wordt) *voor* 3 komt.

Het komt enkele malen voor, dat een door de schrijvers gegeven bewijs wel wat erg omslachtig lijkt. Men moet er natuurlijk zeer voorzichtig mee zijn, die omslachtigheid noodeloos te noemen, omdat ze voort kan komen uit een critische finesse, die den lezer ontgaat. Ik ben er echter niet in geslaagd (het zij meer als een verzoek om inlichtingen, dan als aanmerking gezegd), het motief te ontdekken voor de complicatie van het bewijs der stelling, dat elke geordende eindige verzameling een laagste en een hoogste element heeft. Men vindt die stelling in bekende werken over de leer der verzamelingen indirect zoo bewezen, dat men opmerkt, dat als de verzameling geen laagste element had, aan een willekeurig gekozen element a_{p_1}, een element a_{p_2}, daaraan een element a_{p_3}, zou voorafgaan enz., zoodat men een fundamentaalreeks van elementen zou verkrijgen, in strijd met het gegeven, dat de verzameling eindig is. Welk bezwaar hebben de schrijvers tegen deze redeneering? Het bewijs, dat zij er voor in de plaats geven, lijkt bovendien niet geheel onbedenkelijk. Zij zeggen, dat als a_1 niet het laagste element is, er een element a_{p_1} is, lager dan a_1 en dat de elementen met index, kleiner dan p_1, hooger dan a_1 zijn. Dit is, zooals het er staat, onjuist. Ze bedoelen met a_{p_1} blijkbaar het

eerste element in de rangorde a_1, a_2, a_3, a_4 ...... lager dan a_1, maar hoe weten ze, dat de verzameling van de elementen, lager dan a_1, een eerste element heeft? Toch alleen maar op grond van de rekenkundige stelling, dat een eindige getallenverzameling een kleinste getal heeft; maar dat is een bijzonder geval van de te bewijzen stelling en men vindt haar in de rekenkunde juist op dezelfde wijze bewezen, als boven voor de hier bedoelde stelling geschetst werd.

Een tweede voorbeeld van een zonder toelichting niet begrijpelijke complicatie heeft men op blz. 121. Is het noodig, daar de verzameling van de omtrekken O der rechthoekklompjes te beschouwen? Kan men niet a definieeren als afstand van de afgesloten verzameling, bestaande uit de punten der rechthoekklompjes (inclusief omtrek) en de grens L en dan het bewijs op blz. 121 weglaten?

Op blz. 71 wordt de zeer belangrijke stelling bewezen, dat bij een grenspunt van een fundamentaalreeks van punten een deelreeks is aan te wijzen, waarvoor dit punt eenig grenspunt is. Hier had aan vooraf dienen te gaan het bewijs, dat bij een grenspunt van een puntverzameling een fundamentaalreeks van tot die verzameling behoorende punten is aan te wijzen, waarvoor dit punt grenspunt is. Immers op verschillende plaatsen (b.v. blz. 83) worden grenspunten van fundamentaalreeksen van punten beschouwd en zonder het bedoelde bewijs weet men niet, of men zoodoende wel alle grenspunten krijgt.

Een slordigheid, die ik van deze schrijvers niet had verwacht, is het spreken over geordende verzamelingen zonder vermelding van de orderelatie, waarnaar de ordening is geschied. Dit geeft op blz. 44 zelfs aanleiding tot de onjuiste bewering, dat een willekeurige verzameling van ordegetallen geördend is, terwijl bedoeld wordt, dat ze naar opstijgende grootte geordend kan worden en tot de volkomen onzinnige stelling, dat een willekeurige verzameling van ordegetallen welgeordend is. Natuurlijk blijkt uit het bewijs wel weer de bedoeling, dat men naar opstijgende grootte moet ordenen, maar een stelling moet er tegen kunnen, geïsoleerd te worden gelezen. Het aantal voorbeelden van deze slordigheid is groot. Ik wijs nog op de uitspraak van blz. 50, dat het ordegetal van de verzameling der natuurlijke getallen ω is. De verzameling der natuurlijke getallen kan echter toch wel naar andere typen worden welgeordend.

Weinig geslaagd lijkt mij op blz. 90 de aan het eigenlijke bewijs van de stelling van Cantor-Bendixson voorafgaande afleiding van den aftelbaarheidsstraal voor een willekeurig punt van een afgesloten puntverzameling. Het is vooreerst zeer verwarrend, dat de constante waarde van den op blz. 90 beschouwden straal van den cirkel, die in zijn binnengebied meer dan een aftelbaar aantal punten der verzameling bevat, de veranderlijke waarde van den afnemenden straal, de grootste waarde van de stralen der cirkels, die elk niet meer dan een aftelbaar aantal punten der verzameling in hun binnengebied omvatten en de limiet van de fundamentaalreeks r_1, r_2, r_3, r_4 ...... alle door eenzelfde letter r worden aangewezen. Vervolgens is het, hoewel juist, allerminst zonder meer duidelijk, dat ontkenning van de bewering, dat er een grootste waarde r bestaat, meebrengt, dat er een convergeerende fundamentaalreeks van toenemende stralen van

cirkels is, die elk ten hoogste een aftelbaar aantal punten bevatten, terwijl de limiet van die reeks de straal is van een cirkel, die in zijn binnengebied een niet-aftelbaar aantal bevat. Wil men de gelijkwaardigheid van die twee uitspraken echter verduidelijken, dan zal men zich, om in te zien, *dat* de reeks r_1, r_2, r_3, ... convergeert, moeten beroepen op de stelling van de bovenste grens en als men deze stelling toch moet gebruiken, kan men het geheele indirecte bewijs van blz. 91 wel weglaten en den aftelbaarheidsstraal rechtstreeks bepalen als bovenste grens van de verzameling van de stralen van de cirkels, die elk slechts een aftelbaar aantal punten in hun binnengebied omvatten.

Op blz. 51 lees ik nog de wonderlijke opmerking, dat het werk van Cantor aanvankelijk nogal aanleiding tot critiek schijnt te hebben gegeven. Ligt het optreden van Cantor in zulk een grijs verleden, dat de schrijvers zich hierover geen zekerheid hebben kunnen verschaffen?

In verband met de mededeelingen op dezelfde bladzijde en met een passage uit het voorbericht, zou ik nog willen opmerken, dat de schrijvers wel wat heel karig zijn met litteratuuropgaven. Dit lijkt mij te betreuren. Zij beschouwen hun werkje toch zelf als een inleiding en ze moeten dus wel de hoop koesteren, dat ze den lezer tot verder doordringen in de leer der verzamelingen zullen kunnen aansporen. Maar waarom wijzen ze hem dan niet eenigszins den weg? Wat heeft hij aan de mededeeling, dat „de meeste groote werken over verzamelingleer meer over het werk van Cantor bevatten"? Hier hadden toch minstens namen als Schoenfliess, Hessenberg, Hausdorff, Fraenkel, Young genoemd kunnen worden, terwijl ook de oorspronkelijke verhandelingen van Cantor geciteerd hadden kunnen worden. Litteratuuropgaven behoeven toch niet dadelijk encyclopaedische volledigheid te bezitten!

De schrijvers beperken er zich nu toe om, behalve naar Borel, uitsluitend naar Brouwer te verwijzen en ze raden den lezer sterk aan, om na kennisname van de vroegere werken van dezen schrijver, diens beroemde verhandeling *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom Ausgeschlossenen Dritten* te bestudeeren. Ik betwijfel, of dit een practische raad is. De schrijvers weten toch ook wel, dat het een hooge uitzondering zal zijn, indien een lezer, op grond van de kennis, die zij hem hebben bijgebracht, van de berucht moeilijke verhandeling ook maar iets zal begrijpen. Wanneer zij echter werkelijk alle Nederlandsche beoefenaren der mathesis willen doen deelen in de „buitengewone charme", die de intuitionistische verzamelingsleer op hen zelf uitoefent, moeten zij een anderen weg inslaan, dien zij, als ik goed zie, in de eerste plaats geroepen zijn, te bewandelen. Met een uitnoodiging daartoe moge deze bespreking besloten worden: mogen zij met dezelfde helderheid, die zij nu hebben betracht, in een tweede deel van hun werk uitsluitend de intuitionistische verzamelingsleer behandelen. Door het geven van een commentaar op de boven geciteerde *Begründung* zullen zij de ongetwijfeld overal dankbaar te aanvaarden gelegenheid scheppen, eenigszins mee te leven in een belangrijke hedendaagsche phase van ontwikkeling van het mathematische denken, welke zich voor een aanzienlijk deel in ons land voltrekt.

E. J. Dijksterhuis.

ONTWERP van een Leerplan voor het Onderwijs in Wiskunde en Werktuigkunde op de H. B. S. met vijfjarigen Cursus.

In de vergadering van leeraren in de wis- en werktuigkunde als bedoeld in artikel 14 van de verordening tot regeling van het Openbaar Middelbaar Onderwijs te 's-Gravenhage (no. 10 van 1920), gehouden op 24 November 1926, is, naar aanleiding van de bespreking van het ontwerp van de commissie Beth, een commissie benoemd, bestaande uit de heeren J. W. van Eek, J. M. W. Spronk, A. van Steenis, P. Visser en Dr. W. L. van de Vooren om dit ontwerp nader in studie te nemen en een ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in wis- en werktuigkunde op de H. B. S. met 5-jarigen cursus samen te stellen.

Na uitvoerige besprekingen is de commissie tot het hierna volgende resultaat gekomen.

Bovendien is, in verband met de vele uiteenloopende opvattingen omtrent het onderwijs in de rekenkunde, in een aanhangsel aangegeven, hoe de commissie meent, dat het ontwerp-leerplan voor dat vak dient uitgevoerd te worden.

De commissie is van oordeel, dat het voor alle leerlingen, dus ook voor hen, die wiskundig minder begaafd zijn, van belang is meer tijd aan de ontwikkeling van de theorie en de bewijsmethoden te geven dan tot dusver algemeen gebruikelijk is.

Hoewel de commissie de beginselen der differentiaal- en integraalrekening niet voor de leerlingen verplicht wil stellen, is zij toch van meening, dat het hoofdbegrip, nl. het limietbegrip, duidelijker omlijnd en bewuster naar voren moet worden gebracht. Voor een vruchtdragende behandeling van het limietbegrip is het echter noodzakelijk, dat er reeds van de lagere klassen af de nadruk op gelegd wordt, om het dan verder te ontwikkelen en scherper te definieeren. (Zie de leiddraad voor rekenkunde).

De commissie zou daarom het onderwijs in differentiaal- en integraalrekening in een afzonderlijk uur in de vijfde klasse behandeld willen zien. Voor de leerlingen, die dit onderwijs volgen, wordt het aantal uren wiskunde dus van vier op vijf gebracht.

Indien op de H. B. S. aan de leerlingen de gelegenheid gegeven wordt op eenvoudige en rustige wijze met de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening in kennis te komen, zullen vele teleurstellingen voorkomen worden. (Zie de circulaire van de cen-

trale commissie tot behartiging der studiebelangen van de ingeschrevenen van de T. H. te Delft, o.a. voorkomende in het weekblad voor gymnasiaal en middelbaar onderwijs van 3 Februari 1926).

Het onderwijs in mechanica in de vijfde klasse wil de commissie verplicht stellen.

Ten slotte spreekt de commissie de wensch uit, dat de cijfers, gegeven voor de facultatieve vakken van geen invloed zullen zijn op het al of niet slagen voor het eindexamen.

REKENKUNDE.

Klasse I.

Tellen. Optellen. Aftrekken. Vermenigvuldigen. Machtsverheffen. Deelen. Deelbaarheid. Grootste gemeene deeler. Kleinste gemeene veelvoud. Repeteerende breuken.

Vraagstukken aansluitend bij de theorie.

Klasse II.

Verhoudingen. Evenredigheden.

Worteltrekking. Vierkantsworteltrekking.

Limietbegrip.

Rechtstreeks en omgekeerd evenredige afhankelijkheid.

Vraagstukken aansluitend bij de theorie.

ALGEBRA.

Klasse I.

Volgorde der bewerkingen. Het gebruik van haken. Invoering van letters. Het in woorden brengen van een vorm en omgekeerd. Het berekenen van vormen als de getalwaarden der letters gegeven zijn. De graad van vormen. Homogene vormen. Rangschikking van vormen. Invoering der algebraïsche getallen. Meetkundige voorstelling daarvan.

Hoofdbewerkingen met algebraïsche getallen en geheele vormen. Merkwaardige producten en quotiënten.

Constante en veranderlijke grootheden. (Het verdient aanbeveling om de waarden, die een algebraïsche vorm, b.v. $x + 1$ aanneemt voor de verschillende waarden van de veranderlijke grafisch voor te stellen, maar slechts op de allereenvoudigste manier. Boven elk punt der lijn der getallen zet men de bijbehoorende waarde van $x + 1$ uit. Gebruik vooral geen Y as).

Vergelijkingen van den eersten graad met één onbekende. Identieke en valsche vergelijkingen. (Het is wenschelijk de oplossing van vergelijkingen als $3x + 1 = 2x + 3$ met bovengenoemde grafische voorstelling toe te lichten). Toepassing op vraagstukken.

Ontbinding in factoren.

Klasse II.

Uitbreiding van de merkwaardige producten. Driehoek van Pascal. Eenvoudige gevallen van het bepalen van G. G. D. en K. G. V. Gebroken vormen.

Invoeren en verduisteren van wortels bij rationale vergelijkingen.

Vergelijkingen van den eersten graad met twee en meer onbekenden. Afhankelijkheid en strijdigheid. Toepassing op vraagstukken.

Wortelgrootheden. Bewerkingen met eenvoudige wortelvormen. Herleiding van $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ (a en b meetbaar). Het rationaal maken van de noemer van een gebroken vorm, als deze een of twee termen bevat en in het laatste geval uitsluitend voor vierkantswortels.

Meetkundige voorstelling van het getallenpaar. De lineaire functie $y = ax + b$. De meetkundige voorstelling is een rechte lijn.

Meetkundige toelichting van de oplossing van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden èn van de strijdigheid èn van de afhankelijkheid.

Klasse III.

Gebroken en negatieve exponenten.

De kwadratische functie $y = ax^2 + bx + c$. (Grafiek. Ontbinding in factoren. Positieve en negatieve toestand. Nulpunten. Extreme waarden). De vierkantsvergelijking. (Discriminant. Imaginaire getallen. Symmetrische functies van de wortels).

Toepassing op vraagstukken.

Irrationale vergelijkingen en andere eenvoudige, die tot vierkantsvergelijkingen kunnen worden herleid.

Logarithmen. (Begrip en eigenschappen. Logarithmentafel. Grafiek).

Reeksen.

Het begrip van samengestelde interest en toepassing op eenvoudige vraagstukken.

De grafiek van de functie $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

Klasse IV.

Logarithmische en exponentieele vergelijkingen.

Reststelling.

Klasse V.

Algemeene herhaling.

BEGINSELEN VAN DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING (facultatief).

Klasse V.

Het differentieeren van de geheele rationale functie, van de functies sin x, cos x, $tg\ x$, van een product van functies, van een quotient van functies en van samengestelde functies. Toepassingen op grafische voorstellingen en op meetkundige en kinematische vraagstukken.

Maxima en minima.

Bepaalde integralen. De bepaalde integraal als functie van de bovenste grens; differentiaalquotient naar de bovenste grens. Onbepaalde integralen correspondeerende met de behandelde differentiaalquotienten. Toepassingen van het begrip bepaalde integraal.

GONIO- EN TRIGONOMETRIE.

Klasse III.

Hoekschaal. De radiaal als hoekmaat. De goniometrische functies en hare betrekkingen. Herleiding van goniometrische verhoudingen van willekeurige hoeken tot die van scherpe hoeken.

Grafieken der goniometrische functies.

Het gebruik der tafels.

Oplossen van de vergelijkingen sin $x = a$, enz.

Sinus- en cosinusregel.

Klasse IV.

Optellingtheorema's. Formules voor sinus, cosinus en tangens van den dubbelen hoek. Formules voor sommen en verschillen van sinussen en cosinussen van verschillende hoeken.

Indentiteiten.

Tangensregel. Berekening van de onbekende elementen van een driehoek uit drie gegeven elementen.

Klasse V.

Eenvoudige berekeningen in den driehoek. Verdere toepassingen van de goniometrie op meetkundige vraagstukken.

Eenvoudige goniometrische vergelijkingen:

$a \sin x + b \cos x = c$.

$\sin x : \sin y = a : b$ en $x + y = c$.

PLANIMETRIE.

Klasse I.

Inleidende begrippen. Axioma I: „Door twee punten gaat een en niet meer dan een rechte". Hoeken. Evenwijdige lijnen waarbij axioma II der evenwijdige lijnen. Eenvoudige eigenschappen van den driehoek. Congruentie van driehoeken. Veelhoeken (som der

hoeken, aantal diagonalen, enz.). Bijzondere vierhoeken. Het begrip meetkundige plaats. Constructies van drie- en veelhoeken.

Klasse II.

Evenredigheid van lijnen. De vermenigvuldigingstransformatie Hieruit de gelijkvormigheid van figuren, in het bijzonder van driehoeken. De berekeningen bij den rechthoekigen driehoek. De projectiestelling met toepassing op berekeningen van lijnen. Constructies.

Oppervlakken van door rechte lijnen begrensde figuren.

Klasse III.

De cirkel. Eenvoudigste eigenschappen. Nauwkeurige behandeling van het begrip raaklijn (limietbegrip). Hoek, waaronder twee krommen elkaar snijden. Verband tusschen hoeken en bogen. Macht van een punt ten opzichte van een cirkel. De cirkels om, in en aan een driehoek. De raaklijnenvierhoek en de koordenvierhoek met de voornaamste eigenschappen. De vermenigvuldigingstransformatie voor den cirkel. Gelijkvormigheidspunten. De eenvoudige regelmatige veelhoeken. Berekening van zijden, diagonalen en oppervlakken. Oppervlak en omtrek van den cirkel.

(Sedert in klasse I voor het eerst constructies zijn besproken. is de theorie daar voortdurend op toegepast. In het bijzonder wordt nog gewezen op de methode van een algebraïsche analyse bij constructies).

Klasse IV. STEREOMETRIE.

Definitie en axioma van het platte vlak. Onderlinge stand van twee vlakken. Snijdende, evenwijdige en kruisende lijnen. Loodrechte stand van lijn en vlak. Hoek van lijn en vlak. De lijn evenwijdig met een vlak. Evenwijdige vlakken. Tweevlakshoek. Loodrechte stand van twee vlakken. Afstand van twee kruisende lijnen.

Drievlakshoek (eigenschappen, constructies, congruentie en symmetrie). Veelvlakshoek. Prisma en pyramide. Scheeve projectie van deze lichamen. Doorsnijding met platte vlakken. Netwerk.

Parallelepipedum. Viervlak. Orthocentrisch viervlak.

Vermenigvuldiging. Gelijkvormigheid. Meetkundige plaatsen van punten en lijnen.

Inhoud van prisma, pyramide, afgeknotte pyramide en afgeknot driezijdig prisma.

Klasse V.

Cylinder, kegel en bol. Doorsneden met een plat vlak. Brandpunten en richtlijnen bij ellips, parabool en hyperbool.

Oppervlak en inhoud van cylinder, kegel, afgeknotte kegel, bol en boldeelen.

Regelmatige veelvlakken.

Klasse IV. BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

Orthogonale projecties van een punt en een rechte lijn op drie projectievlakken. Doorgangspunten van een rechte lijn met de projectievlakken. Evenwijdige, snijdende en kruisende lijnen. Het vlak. Lijn en punt in een vlak. Evenwijdige en snijdende vlakken.

Klasse V.

Evenwijdigheid, snijding en loodrechte stand van lijn en vlak. Het aannemen van één nieuw projectievlak. Het neerslaan van vlakken. Afstanden van punten, lijnen en vlakken. Hoeken tusschen twee lijnen, tusschen lijn en vlak en tusschen twee vlakken.

Projecties van lichamen, die door platte vlakken begrensd worden. Doorsnijding van deze lichamen met platte vlakken. Het wentelen van vlakke figuren en door platte vlakken begrensde lichamen om een as, die in een der projectievlakken ligt of met een der projectievlakken evenwijdig loopt.

Klasse IV. MECHANICA.

Eenparige rechtlijnige beweging.

Ontwikkeling van het begrip snelheid. Het begrip versnelling. Toepassing op de eenparige cirkelbeweging. De begrippen hoeksnelheid en hoekversnelling.

De eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging. Samenstellen en ontbinden van bewegingen. Parabolische beweging.

Harmonische beweging.

Ontwikkeling van de begrippen massa en kracht. Eenhedenstelsels. Dimensies.

Samenstelling van krachten werkende op een stoffelijk punt in het platte vlak en in de ruimte. Eenvoudige gevallen van beweging van een stoffelijk punt onder de werking van standvastige krachten zonder wrijving. Arbeid en arbeidsvermogen. Arbeidssnelheid.

Klasse V.

Krachten werkende op een vast lichaam. Momentenstelling. Evenwijdige krachten. Koppels. Het koppel als vectorgrootheid. Samenstellen van een willekeurig stelsel krachten in een plat vlak. Ontwikkeling van het begrip zwaartepunt. Bepaling van het zwaartepunt van eenige eenvoudige figuren en lichamen.

Evenwicht zonder en met wrijving. Eenige eenvoudige werktuigen.

Uitbreiding van de dynamica van het stoffelijk punt. Beginsel van levende kracht en arbeid. Toepassing op de gedwongen beweging van een stoffelijk punt langs een cirkel.

Dynamica van het vaste lichaam. Traagheidsmoment. Botsing.

LEIDDRAAD VOOR REKENKUNDE.

Tellen. Eén, twee, drie, ... is een ieder bekend als een reeks zonder einde. 1°. hoofdzaak: bepaalde volgorde; 2°. hoofdzaak: de voortzetting; d.w.z. vorming der volgende getallen geschiedt volgens een als vast gekende wet; 3°. hoofdzaak: er is geen einde.

De klankrij (één, twee, drie, ...) is verschillend in de verschillende talen; internationaal zijn de schriftteekens. Terwijl bij de klankreeks niet elk eindig getal uitgesproken kan worden, kan wel elk eindig getal opgeschreven worden, dank zij de beteekenis van de plaats der cijfers. Vergelijking met Romeinsche cijfers. Andere talstelsels. Nul = open plaats.

Optellen. Verklaring der bewerking optellen: b.v. van $3 + 4$. Een leerling telt 1, 2, 3, 4, 5 ...... Als hij 3, het eerste getal, gezegd heeft, valt een tweede leerling in met 1, 2 ...... Zij tellen gelijk op: de som is het getal, dat de eerste leerling zegt op het oogenblik, dat de tweede 4 uitspreekt. De bewerking optellen is steeds uitvoerbaar. Wat de optelling betreft, vormen de natuurlijke getallen een afgesloten systeem.

De overige eigenschappen in woorden en in vergelijking brengen. In het algemeen geen theoretische bewijzen.

Begrippen grooter en kleiner dan.

Aftrekken. Definitie. Het verschil van twee getallen ($a - b$, a aftrektal, b aftrekker) is dat getal, dat bij den aftrekker opgeteld moet worden om het aftrektal te krijgen. $b + (a - b) = a$ of ook $(a - b) + b = a$. De vraag naar het verschil van twee getallen (bv. 6 — 6, 7 — 10) kan niet steeds beantwoord worden. Invoering van nieuwe getallen: de nul en negatieve getallen. Doel: de nieuwe bewerking moet steeds uitvoerbaar zijn.

De positieve en negatieve getallen vormen ten opzichte van de bewerkingen optellen en aftrekken een afgesloten systeem.

Eigenschappen van de aftrekking als bij de optelling. Verdere bespreking der negatieve getallen geschiedt in de algebra.

Vermenigvuldiging. Definitie. De vermenigvuldiging leert ons de som vinden van eenige gelijke getallen, waarvan de grootte en

het aantal gegeven zijn $6 + 6 + 6 + 6 = 4 \times 6$ (4 vermenigvuldiger, 6 vermenigvuldigtal). De natuurlijke getallen vormen ten opzichte van de vermenigvuldiging een afgesloten systeem (vanzelfsprekend, omdat dit reeds het geval is bij de optelling). Eigenschappen als voren. Gedurig product.

Machtsverheffen. Definitie. De machtsverheffing leert ons het product vinden van eenige gelijke factoren, waarvan de grootte en het aantal gegeven zijn. $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$ (6 basis of grondtal, 4 exponent). Eigenschappen als voren.

Deelen. Definitie. Het quotiënt van twee getallen ($a : b$, a deeltal, b deeler) is dat getal dat met de deeler vermenigvuldigd het deeltal oplevert $(a : b) \times b = a$. Niet steeds uitvoerbaar. Deeling met rest is het zoeken van het grootste getal, dat vermenigvuldigd met de deeler, kleiner is dan het deeltal.

Deeltal = Deeler $\times$ Quotient + Rest.

Invoering van nieuwe getallen om de deeling van elk paar getallen mogelijk te maken. Breuken. $2/3$ is het getal, dat met 3 vermenigvuldigd, 2 oplevert. Het systeem der positieve en negatieve geheele en gebroken getallen is t. o. z. van de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, machtsverheffen en deelen een afgesloten systeem. Men noemt deze getallen de rationale getallen. Eigenschappen als voren.

Deelbaarheid. Kenmerken van deelbaarheid met hun bewijzen. Oefening in vreemde talstelsels door het opstellen van dergelijke kenmerken (geen bewerkingen in vreemde talstelsels).

Bepaling van de G. G. D. door ontbinding in factoren en door deeling, (alleen de methode van deeling met bewijs).

K. G. V. Hierbij de eigenschap: „Het K. G. V. van twee getallen is gelijk aan het product der getallen gedeeld door hun G. G. D.” met bewijs.

Repeteerende breuken. Tracht men de breuk $1/3$ tot een decimale breuk te herleiden, dan vindt men:

$0,3 < \frac{1}{3} < 0,4$, dus $\frac{1}{3} - 0,3 < 0,1$

$0,33 < \frac{1}{3} < 0,34$, „ $\frac{1}{3} - 0,33 < 0,01$

$0,333 < \frac{1}{3} < 0,334$, „ $\frac{1}{3} - 0,333 < 0,001$ enz.

De deeling gaat echter nooit op, zoodat men schrijft $1/3 = 0,\dot{3}$.

Omgekeerd kan men nu vragen de waarde van soortgelijke symbolen, b.v. $0,\dot{4}$ als gewone breuk te berekenen.

Volgens het bovenstaande vindt men een benadering van $0,\dot{4}$ in 0,4. 0,4 verschilt minder dan 0,1 met de gezochte waarde. 0,44 is

een betere benadering, want nu is de fout $< 0{,}01$ enz. Vermenigvuldigen we elke benaderde waarde met $9 = 10 - 1$ (gebruikelijke methode), dan vinden we achtereenvolgens:

$4 - 0{,}4$.

$4{,}4 - 0{,}44 = 4 - 0{,}04$.

$4{,}44 - 0{,}444 = 4 - 0{,}004$ enz.

Voor de benaderde waarde kunnen we dan schrijven

$\frac{4}{9} - \frac{1}{9} \times 0{,}4$; $\frac{4}{9} - \frac{1}{9} \times 0{,}04$; $\frac{4}{9} - \frac{1}{9} \times 0{,}04$ enz.

De gezochte waarde van $0{,}\dot{4}$ is dus $\frac{4}{9}$.

Omkeering van bewerkingen. Onder omkeering eener bewerking verstaat men het zoeken van één der getallen dier bewerking, als het andere en de uitkomst dier bewerking gegeven zijn. (Vergelijk: omgekeerde stelling in de meetkunde).

Omkeering der optelling: $10 + \ldots = 14$ of $\ldots + 4 = 14$: de aftrekking.

Klasse II.

Eerste omkeering van de machtsverheffing: worteltrekking. $(\ldots\ldots)^n = a$.

Definitie: Onder de n^0 machtswortel uit een getal a verstaat men het getal, dat tot de n^0 macht gebracht a oplevert.

Deze bewerking is niet steeds uitvoerbaar: $\sqrt{2}$. Vierkantsworteltrekking. Het zoeken van het grootste getal in een bepaald aantal decimalen, waarvan het quadraat kleiner is dan een gegeven getal. Uitbreiding van dit „begrip" tot de n^0 machtsworteltrekking.

Limietbegrip: Aan de hand van eenvoudige getallenrijen kan dit begrip worden ingeleid, b.v.:

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots\ldots \rightarrow 1.$

$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\ldots\ldots \rightarrow 1.$

$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots\ldots\ldots \rightarrow 1.$

$\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{7}{6}, \frac{10}{8}, \frac{13}{10} \ldots\ldots\ldots \rightarrow \frac{3}{2}.$

$0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ \ldots\ldots\ldots \rightarrow \frac{1}{3}.$ (repeteerende breuken).

$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414 \ldots\ldots\ldots \rightarrow \sqrt{2}.$

$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415 \ldots\ldots\ldots \rightarrow \sqrt{2}.$

wetmatigheid dezer getallenrij:

$1^2 < 2 < 2^2$; $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$; $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$; enz.

Elk volgend getal heeft één decimaal meer.

De Commissie:

J. W. VAN EEK, *Voorzitter.* P. VISSER.
J. M. W. SPRONK. Dr. W. L. VAN DE VOOREN.
A. VAN STEENIS, *Secretaris.*